1 罗尔中值定理）《30讲》P215

设 $f(x)$ 满足 $\begin{cases} ① 在 [a,b] 上连续 \\ ② 在 (a,b) 上可导 \\ ③ f(a)=f(b) \end{cases}$，则存在 $\xi \in (a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$

设 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续，① 在 (a,b) 上连续 ② 在 (a,b) 上可导

③ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to b^-} f(x) = S$，则 $\exists\, \xi \in (a,b)$ 使得 $f'(\xi)=0$

设 $g(x) = \begin{cases} S, & x=a \\ f(x), & x\in(a,b) \\ S, & x=b \end{cases}$

① $\lim\limits_{x\to a^+} g(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = S = g(a) \Rightarrow g(x)$ 在 a 处右连续

$\lim\limits_{x\to b^-} g(x) = \lim\limits_{x\to b^-} f(x) = S = g(b) \Rightarrow$ b 左连续

又 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续 $\Rightarrow g(x)$ 在 (a,b) 上连续

$\Rightarrow g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续

② $x\in(a,b)$ 时 $g(x)=f(x)$，又 $f(x)$ 在 (a,b) 上可导

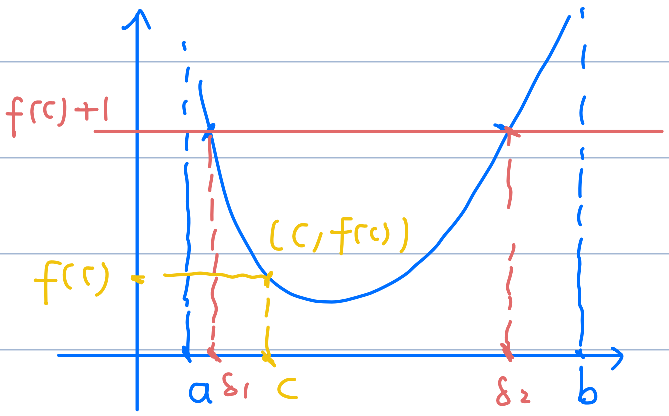
$\Rightarrow g(x)$ 在 (a,b) 上可导

③ $g(a)=g(b)=S$

由罗尔中值定理，$\exists\, \xi \in (a,b)$ 使得 $g'(\xi)=f'(\xi)=0$

设 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续，在 (a,b) 上可导，$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = +\infty$，则 $\exists\, \xi \in (a,b)$ 使得 $f'(\xi) = 0$



任取一点 $c \in (a,b)$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to a} f(x) = +\infty,\ 又\ f(c) = c \\ &f(x)\ 在\ [a,c]\ 上连续 \end{aligned}\right\}$$

$\Rightarrow \exists\, \delta_1 \in (a,c)$ 使得 $f(\delta_2) = f(c) + 1$

同理 $\exists\, \delta_2 \in (c,b)$ 使得 $f(\delta_1) = f(c) + 1$

$$\left\{\begin{aligned} &f(x)\ 在\ [\delta_1,\delta_2]\ 上连续 \\ &f(x)\ 在\ (\delta_1,\delta_2)\ 上可导 \\ &f(\delta_1) = f(\delta_2) = f(c)+1 \end{aligned}\right. \Rightarrow \exists\, \xi \in (\delta_1,\delta_2)\ 使得\ f'(\xi) = 0$$

设 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上连续，在 $(a,+\infty)$ 上可导

$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$，

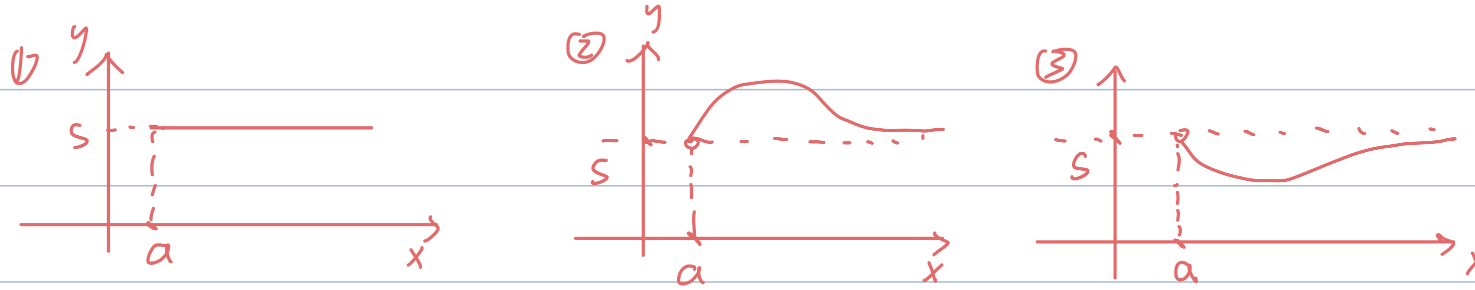
则 $\exists\, \xi \in (a,+\infty)$，使得 $f'(\xi) = 0$

（证明与上题一样）

设 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上连续，在 $(a,+\infty)$ 上可导

$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = s$，则 $\exists \xi \in (a,+\infty)$，使得 $f'(\xi)=0$

这种情况，图像有3种

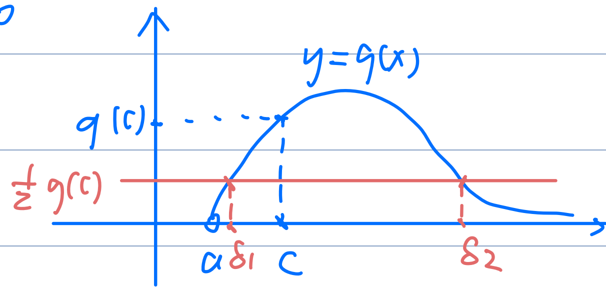


（平移） 令 $g(x)=f(x)-s$，从而 $\lim\limits_{x\to a^+} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$

1) $g(x)\equiv 0 \Rightarrow f(x)\equiv s \Rightarrow f'(x)=0$

2) $\exists\, c\in(a,+\infty)$ $g(c)\neq 0$

不妨设 $g(c)>0$



$\lim\limits_{x\to a^+} g(x)=0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists\delta>0$，使得当 $0<x-a<\varepsilon$ 时，有 $|g(x)|<\varepsilon$

$\lim\limits_{x\to a^+} g(x)=0 \Rightarrow \exists x_1\in(a,c)$ 使得 $g(x_1)<\frac{1}{2}g(c)<g(c)$

$\Rightarrow \exists \delta_1\in(x_1,c)$，$g(\delta_1)=\frac{1}{2}g(c)$ （介值定理）

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists M>0$，使得当 $x>X$ 时，有 $|g(x)|<\varepsilon$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0 \Rightarrow \exists x_2\in(c,+\infty)$，使得 $g(x_2)<\frac{1}{2}g(c)<g(c)$

$\Rightarrow \exists \delta_2\in(c,x_2)$，$g(\delta_2)=\frac{1}{2}g(c)$

$\left\{\begin{array}{l} g(x) \text{ 在 } [\delta_1,\delta_2] \text{ 上连续} \\ \quad\text{在 } (\delta_1,\delta_2) \text{ 可导} \\ g(\delta_1)=g(\delta_2) \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} \exists\xi\in[\delta_1,\delta_2],\ g'(\xi)=0 \\ g'(\xi)=f'(\xi)=0 \end{array}$

罗尔中值定理 > 原函数法

题型：一般要求证明结论 $\frac{s(\xi)}{r(\xi)} = \frac{t(\xi)}{r(\xi)}$ 或 $r(\xi)s(\xi) = r(\xi)t(\xi)$

要构造函数 $F(x)$，$F(a) = F(b) \Rightarrow \exists \xi \in (a,b) \Rightarrow F'(\xi) = 0$

$\Rightarrow s(\xi) = t(\xi) \Rightarrow$ 结论

逆向工程

构造方法：结论 $\xrightarrow{\text{化简}} s(\xi) = t(\xi) \xrightarrow{\text{换元}} s(x) = t(x)$

$\Rightarrow s(x) - t(x) = 0 \Rightarrow \int s(x) - t(x)\,dx = C$

$F(x) = \int s(x) - t(x)\,dx$ 就是我们要构造的函数

万能构造，结论形如：$h'(x) + p(x)h(x) = 0$

$G(x) = h(x)e^{\int p(x)dx}$

微分方程：$f' + p(x)f = q(x)$

$\Rightarrow h(x) = e^{-\int p(x)dx} \cdot \left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right)$

$h'(x) + p(x)h(x) = 0$ 中 $q(x) = 0$

$\Rightarrow h(x) = e^{-\int p(x)dx} \cdot (C)$

$\Rightarrow C = h(x)e^{\int p(x)dx}$

例：设 $h(x)$，$p(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$h(x)$ 在 (a,b) 上可导，且 $h(a) = h(b) = 0$，证明 $\exists \xi \in (a,b)$，使得 $h'(\xi) + h(\xi)p(\xi) = 0$

$h'(x) + h(x)p(x) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{dh}{dx} + h \cdot p = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{h}dh + p\,dx = 0$

$\Rightarrow \ln|h| + \int p\,dx = C_1$

$$\Rightarrow \quad |h|\cdot e^{\int p\,dx} = C_2 \qquad (C_2 = e^{C_1} > 0)$$

$$\Rightarrow \quad h\cdot e^{\int p\,dx} = C_3 \qquad (C_3 = \pm C_2 \neq 0)$$

令 $G(x) = h(x)\cdot e^{\int p(x)\,dx}$

$$G(a) = h(a)\cdot e^{\int p(x)\,dx} = 0$$

$$G(b) = h(b)\cdot e^{\int p(x)\,dx} = 0$$

$$\begin{cases} G(x) \text{ 在 } [a,b] \text{ 上连续} \\ \qquad (a,b) \text{ 可导} \\ G(a) = G(b) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \exists\, \xi \in (a,b), \quad G'(\xi) = 0$$

$$G'(x) = h'\cdot e^{\int p\,dx} + h\cdot e^{\int p\,dx}\cdot p$$

$$G'(\xi) = h'(\xi)\cdot e^{\int p\,dx} + h(\xi)\cdot p(\xi)\cdot e^{\int p\,dx} = 0$$

又 $e^{\int p\,dx}\big|_{x=\xi} > 0 \quad \Rightarrow \quad h'(\xi) + h(\xi)\cdot p(\xi) = 0$

设 $f(x)$, $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上有二阶导数，且 $g(x) \neq 0$, $g''(x) \neq 0$,

又 $f(a) = f(b) = g(a) = g(b) = 0$,

证明：$\exists\, \xi \in (a,b)$ 使得 $\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)} = \dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$

$$f(x)\cdot g''(x) - f''(x)\,g(x) = 0$$

$$\int f(x)\,g''(x)\,dx - \int f''(x)\,g(x)\,dx = C_1$$

$$\int f(x)\,d\,g'(x) - \int g(x)\,d\,f'(x) = C_1$$

分部积分公式

$$\left(f(x)\cdot g'(x) - \int g'(x)\,d f(x) \right) - \left(f'(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\,d g(x) \right) = C_1$$

$$f(x)\cdot g'(x) - f'(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\,g'(x)\,dx + \int f'(x)\cdot g'(x)\,dx = C_1$$

$f(x)\cdot g'(x)-f'(x)g(x)=C_1$

设 $G(x)=f(x)\cdot g'(x)-f'(x)\cdot g(x)$

$G(a)=G(b)=0$

$\exists\ \xi\in(a,b)$ 使得 $G'(\xi)=0$

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶导数，且 $f(0)=f'(0)=0$

证明：$\exists\ \xi\in(0,1)$，使得 $f''(\xi)=\dfrac{2f(\xi)}{(1-\xi)^2}$

$f''(x)\cdot(1-x)^2-2f(x)=0$

$\int f''(x)\cdot(1-x)^2\,dx-2\int f(x)\,dx=C_1$

$\int(1-x)^2\,d\,f'(x)-2\int f(x)\,dx=C_1$

$(1-x)^2f'(x)-\int f'(x)\,d(1-x)^2-2\int f(x)dx=C_1$

$(1-x)^2f'(x)+\int f'(x)\cdot 2(1-x)\cdot dx-2\int f(x)\,dx=C_1$

$(1-x)^2f'(x)+2\int f'(x)\,dx-2\int f'(x)\cdot x\,dx-2\int f(x)dx=C_1$

$(1-x)^2f'(x)+2f(x)-2\int x\,d\,f(x)-2\int f(x)\,dx=C_2$

$(1-x)^2f'(x)+2f(x)-2\left(xf(x)-\int f(x)\,dx\right)-2\int f(x)dx=C_2$

$(1-x)^2f'(x)+2f(x)-2xf(x)=C_2$

令 $G(x)=(1-x)^2f'(x)+2f(x)-2xf(x)$

$G'(x)=2(1-x)\cdot(-1)\cdot f'(x)+(1-x)^2f''(x)+2f'(x)-2\left(f(x)+x\cdot f'(x)\right)$

$=-2(1-x)f'(x)+(1-x)^2f''(x)+2f'(x)-2f(x)-2xf'(x)$

$=-2f'(x)+2xf'(x)+(1-x)^2f''(x)+2f'(x)-2f(x)-2xf'(x)$

$=(1-x)^2f''(x)-2f(x)$

$G(0)=0 \quad G(1)=0$

$\exists\, \xi \in (0,1) \Rightarrow G'(\xi)=0=(1-\xi)^2 f''(\xi)-2f(\xi)$

$\Rightarrow f''(\xi)=\dfrac{2f(\xi)}{(1-\xi)^2}$

设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，

证明：$\exists\, \xi \in(-\infty,+\infty)$，使得 $f'(\xi)=\xi+\xi f^2(\xi)$

$f'(x)=x+xf^2(x)=x(1+f^2(x))$ （要意识到可分离变量）

$\dfrac{df}{dx}=x(1+f^2) \Rightarrow \dfrac{df}{1+f^2}=x\,dx$

$\Rightarrow \arctan f=\frac{1}{2}x^2+C$

$\Rightarrow$ 令 $G(x)=\arctan f(x)-\frac{1}{2}x^2$

$\Rightarrow G'(x)=\dfrac{1}{1+f^2}\cdot f'-x$

$\lim\limits_{x\to-\infty} G(x)=-\infty \quad \lim\limits_{x\to+\infty} G(x)=+\infty$

由罗尔中值定理（12种情形）

$\exists\, \xi \in(-\infty,+\infty)$，$G'(\xi)=\dfrac{f'(\xi)}{1+f^2(\xi)}-\xi=0$

$\Rightarrow f'(\xi)=\xi+\xi\cdot f^2(\xi)$

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上具有二阶导数，且 $f'(0)=f'(1)=0$

证明：$\exists\xi\in(0,1)$，使得 $f''(\xi)+(f'(\xi)\cdot f(\xi))^2=0$

$f''(x)+(f'(x)\cdot f(x))^2=0$

令 $p=\frac{df}{dx}=f'(x)$，$f''(x)=\frac{d(\frac{df}{dx})}{dx}=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{df}\cdot\frac{df}{dx}=\frac{dp}{df}\cdot p$

$\frac{dp}{df}\cdot p+p^2\cdot f^2=0$

① $p\equiv 0$，结论成立

② $\neg(p\equiv 0)$

$\frac{dp}{df}+p\cdot f^2=0 \Rightarrow \frac{1}{p}dp+f^2df=0$

$\Rightarrow \ln|p|+\frac{1}{3}f^3=C_1$

$\Rightarrow \ln|p|=C_1-\frac{1}{3}f^3$

$\Rightarrow |p|=e^{-\frac{1}{3}f^3}\cdot C_2 \quad (C_2=e^{C_1}>0)$

$\Rightarrow p=e^{-\frac{1}{3}f^3}\cdot C_3 \quad (C_3=\pm C_2\neq 0)$

$\Rightarrow f'\cdot e^{\frac{1}{3}f^3}=C_3$

令 $G(x)=f'(x)\cdot e^{\frac{1}{3}f^3(x)}$

$G'(x)=f''(x)\cdot e^{\frac{1}{3}f^3(x)}+f'(x)\cdot e^{\frac{1}{3}f^3(x)}\cdot f^2(x)\cdot f'(x)$

$G(0)=G(1)=0$

$\exists\xi\in(0,1)$，$G'(\xi)=f''(\xi)\cdot\square+f'(\xi)\cdot\square\cdot f^2(x)\cdot f'(\xi)=0$

又 $\square>0 \Rightarrow f''(\xi)+(f'(\xi)\cdot f(\xi))^2=0$

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上具有二阶导数，$f(0)=f(1)=0$

这道题原有点问题

且 $f'(x)>0$，证明：$\exists\, \xi \in (0,1)$，使得 $f''(\xi)\cdot f(\xi)=-1$

(数理逻辑，永假条件可推出任意结论)

$$f''(x)\cdot f(x) = -1$$

令 $p=\dfrac{df}{dx}$ $\qquad f''=\dfrac{d\left(\frac{df}{dx}\right)}{dx}=\dfrac{dp}{dx}=\dfrac{dp}{df}\cdot\dfrac{df}{dx}=\dfrac{dp}{df}\cdot p$

$$p\cdot\frac{dp}{df}\cdot f=-1$$

$$f'(x)>0 \Rightarrow \neg\,(f\equiv 0)$$

$\Rightarrow \quad p\,dp+\dfrac{1}{f}\cdot df=0$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2}p^2+\ln|f|=C_1 \Rightarrow \ln|f|=C_1-\dfrac{1}{2}p^2$

$\Rightarrow |f|=C_2\cdot e^{-\frac{1}{2}p^2} \quad (C_2=e^{C_1}>0)$

$\Rightarrow f=C_3\cdot e^{-\frac{1}{2}p^2} \quad (C_3=\pm C_2\neq 0)$

$\Rightarrow f\cdot e^{\frac{1}{2}p^2}=C_3$

令 $G(x)=f(x)\cdot e^{\frac{1}{2}p^2(x)}=f(x)\cdot e^{\frac{1}{2}(f')^2(x)}$

$$G'(x)=f'(x)\cdot e^{\frac{1}{2}(f')^2(x)}+f(x)\cdot e^{\frac{1}{2}(f')^2(x)}\cdot f'(x)\cdot f''(x)$$

$$G(0)=G(1)=0$$

$\exists\,\xi\in(0,1)$，

$$G'(\xi)=f'(\xi)\cdot e^{\frac{1}{2}(f')^2(\xi)}+f(\xi)\cdot e^{\frac{1}{2}(f')^2(\xi)}\cdot f'(\xi)\cdot f''(\xi)=0$$

$$e^{\frac{1}{2}(f')^2(\xi)}>0$$

$\Rightarrow f'(\xi)+f(\xi)\cdot f'(\xi)\cdot f''(\xi)=0$

$$f'(x)>0 \Rightarrow f'(\xi)>0$$

$\Rightarrow 1+f(\xi)\cdot f''(\xi)=0$

$\Rightarrow f(\xi)\cdot f''(\xi)=-1$

设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上具有二阶导数，$f(0)=f(1)=f'(0)=f'(1)=0$
这题也有点问题

且 $f'(x)>0$，证明 $\exists \xi\in(0,1)$，使得 $f''(\xi)+(f'(\xi))^2=0$

$f''(x)+(f')^2(x)=0$

令 $p=\frac{df}{dx}$ $\quad f''=\frac{d(\frac{df}{dx})}{dx}=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{df}\cdot\frac{df}{dx}=\frac{dp}{df}\cdot p$

$p\cdot\frac{dp}{df}+f^2=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{2}p^2+\frac{1}{3}f^3=C_1$

令 $G(x)=\frac{1}{2}(f')^2(x)+\frac{1}{3}f^3(x)$

$G'(x)=f'(x)\cdot f''(x)+f^2(x)\cdot f'(x)$

$G(0)=G(1)=0$

$\Rightarrow \exists \xi\in(0,1)$，$G'(\xi)=f'(\xi)\cdot f''(\xi)+f^2(\xi)\cdot f'(\xi)=0$

$f'(x)>0 \Rightarrow f'(\xi)>0 \Rightarrow f''(\xi)+f^2(\xi)=0$

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上具有二阶导数，

且 $f(1)>0$，$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}=a<0$， 证明：

(1) $f(x)=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有一个实根

（极限保号性）$\exists \delta\in(0,1)$ 使得 $\frac{f(\delta)}{\delta}<0$，又 $\delta>0 \Rightarrow f(\delta)<0$

又 $f(1)>0 \Rightarrow \exists \xi\in(\delta,1)$ 使得 $f(\xi)=0$

(2) $f(x)f''(x)+(f')^2(x)=0$ 在 $(0,1)$ 内至少存在两个实根

令 $p=\frac{df}{dx}$ $\quad f''=\frac{d(\frac{df}{dx})}{dx}=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{df}\cdot\frac{df}{dx}=p\cdot\frac{dp}{df}$

$f\cdot p\cdot\frac{dp}{df}+p^2=0$

$f(\delta)<0$，$f(1)>0 \Rightarrow \neg(f'(x)\equiv0)$

$f \cdot \frac{dp}{df} + p = 0 \Rightarrow \frac{1}{p}dp + \frac{1}{f}df = 0$

$\Rightarrow \ln|p| + \ln|f| = C_1$

$\Rightarrow \ln|pf| = C_1$

$\Rightarrow pf = C_2 \quad (C_2 = \pm e^{C_1} \neq 0)$

令 $G(x) = f'(x) \cdot f(x)$

$G'(x) = f''(x) \cdot f(x) + (f')^2(x)$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} = a < 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$

又 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导 $\Rightarrow f(x)$ 在 $x=0$ 处连续 $\Rightarrow f(0)=0$

$f(0) = f(\xi) = 0 \Rightarrow \exists\, \theta \in (0,\xi),\ f'(\theta) = 0$

$G(0) = G(\theta) = G(\xi) = 0$

$\exists\, \alpha_1 \in (0,\theta)$ 使得 $G'(\alpha_1) = f''(\alpha_1)f(\alpha_1) + (f')^2(\alpha_1) = 0$

$\exists\, \alpha_2 \in (\theta,\xi)$ 使得 $G'(\alpha_2) = f''(\alpha_2)f(\alpha_2) + (f')^2(\alpha_2) = 0$

万能构造

① $h'(x) + p(x)h(x) = 0$

构造辅助函数 $G(x) = h(x)e^{\int p(x)dx}$

② $h'(x) + p(x)h(x) = q(x)$

构造辅助函数 $G(x) = h(x)e^{\int p(x)dx} - \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$

设 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续，在 $(1,2)$ 内可导，$f(2)=2$，$f(1)=\frac{1}{2}$

证明：$\exists\, \xi\in(1,2)$，使得 $f'(\xi)=\frac{2f(\xi)}{\xi}$

$$f'(x)=\frac{2f(x)}{x}$$

$$f'(x)+\left(\frac{-2}{x}\right)f(x)=0$$

$$G(x)=f(x)\cdot e^{\int -\frac{2}{x}dx}=f(x)\cdot e^{-2\cdot\ln|x|}=f(x)\cdot e^{-\ln x^2}$$

$$=f(x)\cdot\frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow G'(x)=f'(x)\cdot\frac{1}{x^2}+f(x)\cdot(-2)\cdot(x^{-3})$$

$$G(1)=f(1)\cdot\frac{1}{1}=\frac{1}{2}$$

$$G(2)=f(2)\cdot\frac{1}{2^2}=\frac{1}{2}$$

$$G(1)=G(2)$$

$\Rightarrow \exists\, \xi\in(1,2)$ 使得

$$G'(\xi)=f'(\xi)\cdot\frac{1}{\xi^2}-\frac{2f(\xi)}{\xi^3}=0 \Rightarrow f'(\xi)=\frac{2f(\xi)}{\xi}$$

设 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上可导，$f(0)=0$

证明：$\exists\, \xi\in(0,\pi)$，使得 $2f'(\xi)=f(\xi)\cdot\tan\frac{\xi}{2}$

$$2f'(x)=f(x)\tan\frac{x}{2}$$

$$f'(x)-\frac{1}{2}f(x)\tan\frac{x}{2}=0$$

$$f'(x)+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\tan\frac{x}{2}\right)f(x)=0$$

$$G(x)=f(x)\cdot e^{\int -\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}dx}=f(x)\cdot\cos\frac{x}{2}$$

$$G'(x)=f'(x)\cdot\cos\frac{x}{2}+f(x)\cdot\left(-\sin\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}$$

$$G(0)=0,\qquad G(\pi)=f(x)\cdot\cos\frac{x}{2}=0$$

$G(0) = G(\pi) = 0 \Rightarrow \exists \xi \in (0, \pi)$

$G'(\xi) = f'(\xi) \cdot \cos\frac{\xi}{2} - \frac{1}{2} f(\xi) \cdot \sin\frac{\xi}{2} = 0$

$\xi \in (0, \pi) \Rightarrow (\frac{\xi}{2}) \in (0, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \cos\frac{\xi}{2} \neq 0$

$\Rightarrow f'(\xi) - \frac{1}{2} \cdot f(\xi) \cdot \tan\frac{\xi}{2} = 0$

$\Rightarrow 2f'(\xi) = f(\xi) \cdot \tan\frac{\xi}{2}$

设$f(x)$在$[0,1]$上二阶可导，$f(0)=f(1)=0$，

证明：$\exists \xi \in (0,1)$，使得 $f''(\xi) = \frac{2f'(\xi)}{1-\xi}$

$f''(x) - \frac{2}{1-x} f'(x) = 0$

$G(x) = f'(x) \cdot e^{\int -\frac{2}{1-x} dx} = f'(x) \cdot (1-x)^2$

$G'(x) = f''(x) \cdot (1-x)^2 + f'(x) \cdot 2(1-x) \cdot (-1)$

$= f''(x) \cdot (1-x)^2 - 2f'(x) \cdot (1-x)$

$G(1) = 0$

$f(0) = f(1) = 0 \Rightarrow \exists \delta \in (0,1)$ 使得 $f'(\delta) = 0$

$G(\delta) = 0$

$G(1) = G(\delta) = 0 \Rightarrow \exists \xi \in (\delta, 1)$

$G'(\xi) = f''(\xi) \cdot (1-\xi)^2 - 2f'(\xi)(1-\xi) = 0$

$\xi \in (\delta, 1) \Rightarrow (1-\xi) \neq 0$

$\Rightarrow f''(\xi) \cdot (1-\xi) - 2f'(\xi) = 0$

$\Rightarrow f''(\xi) = \frac{2f'(\xi)}{1-\xi}$

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 上可导，$f(0)=0$ 且 $x\in(0,1]$ 时，$f(x)>0$。证明：$\forall\alpha>0$，$\exists\,\xi\in(0,1)$ 使得 $\dfrac{\alpha f'(\xi)}{f(\xi)}=\dfrac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$

$$\frac{\alpha f'(x)}{f(x)}=\frac{f'(1-x)}{f(1-x)} \Rightarrow f'(x)-\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{f'(1-x)}{f(1-x)}\cdot f(x)=0$$

$$\Rightarrow G(x)=f(x)e^{\int-\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{f'(1-x)}{f(1-x)}dx}$$

$$=f(x)\cdot f^{\frac{1}{\alpha}}(1-x)$$

$$G'(x)=f'(x)\cdot f^{\frac{1}{\alpha}}(1-x)+f(x)\cdot\frac{1}{\alpha}\cdot f^{\frac{1}{\alpha}-1}(1-x)\cdot f'(1-x)\cdot(-1)$$

$$G(0)=f(0)\cdot f^{\frac{1}{\alpha}}(1)=0$$

$$G(1)=f(1)\cdot f^{\frac{1}{\alpha}}(0)=0$$

$$G(0)=G(1)\Rightarrow\exists\,\xi\in(0,1)$$

$$G'(\xi)=f'(\xi)\cdot f^{\frac{1}{\alpha}}(1-\xi)-f(\xi)\cdot\frac{1}{\alpha}\cdot f^{\frac{1}{\alpha}-1}(1-\xi)f'(1-\xi)$$

$$=f'(\xi)\cdot f^{\frac{1}{\alpha}}(1-\xi)-\frac{1}{\alpha}\cdot f(\xi)\cdot\frac{f^{\frac{1}{\alpha}}(1-\xi)}{f(1-\xi)}\cdot f'(1-\xi)=0$$

$$f(x)>0\Rightarrow f^{\frac{1}{\alpha}}(1-\xi)\neq0$$

$$\Rightarrow f'(\xi)-\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{f(\xi)}{f(1-\xi)}\cdot f'(1-\xi)=0$$

$$\Rightarrow\frac{\alpha f'(\xi)}{f(\xi)}=\frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$$

设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，且 $f(x)+f'(x)\neq0$，$f(x)>1$

证明：存在 $\xi\in(-\infty,+\infty)$ 使得 $\dfrac{f(\xi)-f'(\xi)}{f(\xi)+f'(\xi)}=e^{2\xi}$

$$f(x)-f'(x)=e^{2x}f(x)+e^{2x}\cdot f'(x)$$

$$(1-e^{2x})f(x) = (1+e^{2x})f'(x)$$

$$\Rightarrow f'(x) + \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} f(x) = 0$$

$$f'(x) + \left(1 - \frac{2}{e^{2x}+1}\right) f(x) = 0$$

$$\Rightarrow G(x) = f(x) \cdot e^{\int 1 - \frac{2}{1+e^{2x}} dx}$$

$$= f(x) \cdot \frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$$

$$G'(x) = f'(x) \frac{e^{x}+e^{-x}}{2} + f(x) \cdot \frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$$

$$\lim_{x\to-\infty} G(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) \cdot \frac{e^{x}+e^{-x}}{2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} G(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) \frac{e^{x}+e^{-x}}{2} = +\infty$$

由其他12种~~影~~中值定理：$\exists\, \xi \in (-\infty, +\infty)$

$$G'(\xi) = f'(x) \frac{e^{\xi}+e^{-\xi}}{2} + f(x) \frac{e^{\xi}-e^{-\xi}}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{f(\xi)-f'(\xi)}{f(\xi)+f'(\xi)} = e^{2\xi}$$

设$f(x)$在$[0,\frac{\pi}{2}]$连续，在$(0,\frac{\pi}{2})$上可导，$f(0)=f(\frac{\pi}{2})=-\frac{1}{2}$.

证明：$\exists\, \xi \in (0,\frac{\pi}{2})$，使得 $f'(\xi)-f(\xi)=\sin x$

$$f'(x) + (-1)f(x) = \sin x$$

$$令\ G(x) = f(x) \cdot e^{\int (-1) dx} - \int \sin x \cdot e^{\int (-1) dx} dx$$

$$= f(x) \cdot e^{-x} + \frac{1}{2}\sin x \cdot e^{-x} + \frac{1}{2}\cos x \cdot e^{-x}$$

$$G'(x) = f'(x) \cdot e^{-x} - f(x) \cdot e^{-x}$$

$+\frac{1}{2}(\cos x\cdot e^{-x}-\sin x\cdot e^{-x})$

$+\frac{1}{2}(-\sin x\cdot e^{-x}-\cos x\cdot e^{-x})$

$=f'(x)\cdot e^{-x}-f(x)\cdot e^{-x}-\sin x\cdot e^{-x}$

$G(0)=-\frac{1}{2}+0+\frac{1}{2}=0$

$G(\frac{\pi}{2})=-\frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}e^{-\frac{\pi}{2}}=0$

$\exists\,\xi\in(0,\frac{\pi}{2})$

$G'(\xi)=f'(\xi)\cdot e^{-\xi}-f(\xi)\cdot e^{-\xi}-\sin\xi\cdot e^{-\xi}=0$

$e^{-\xi}>0 \Rightarrow f'(\xi)-f(\xi)=\sin\xi$

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$

求证：$\exists\,\xi\in(0,1)$ 使得 $\xi f''(\xi)+(1+\xi)\cdot f'(\xi)=1+\xi$

$xf''(x)+(1+x)\cdot f'(x)=1+x$

令 $p=f'=\frac{df}{dx}$　　$f''=\frac{d(\frac{df}{dx})}{dx}=\frac{dp}{dx}$

$p'+(\frac{1}{x}+1)p=(\frac{1}{x}+1)$

$G(x)=p\cdot e^{\int\frac{1}{x}+1\,dx}-\int(\frac{1}{x}+1)e^{\int\frac{1}{x}+1\,dx}dx$

$=p\cdot x\cdot e^{x}-\int(\frac{1}{x}+1)\cdot x\cdot e^{x}dx$

$=p\cdot x\cdot e^{x}-\int(x+1)e^{x}dx$

$=p\cdot x\cdot e^{x}-x\cdot e^{x}=(f'(x)-1)\cdot xe^{x}$

$G'(x)=f''(x)\cdot xe^{x}+(f'(x)-1)\cdot e^{x}+(f'(x)-1)\cdot x\cdot e^{x}$

$G(0)=0$　　要找另一点有 $G(x)=x\cdot e^{x}\cdot(f'(x)-1)=0$

其中 $x>0$ $(x\in(0,1))$，$e^{x}>0$，只可能 $f'(x)-1=0$

由拉格朗日中值定理：$\exists \delta \in (0,1)$ 使得 $f'(\delta) = \dfrac{f(1)-f(0)}{1-0} = 1$

$G(\delta) = 0$

$G(0) = G(\delta) = 0 \Rightarrow \exists \xi \in (0, \delta)$

$G'(\xi) = f''(\xi)\cdot\xi\cdot e^{\xi} + (f'(\xi)-1)\cdot e^{\xi} + (f'(\xi)-1)\cdot\xi\cdot e^{\xi} = 0$

$\exists\ \xi\cdot f''(\xi) + (1+\xi)\cdot f'(\xi) = 1+\xi$

(拉格朗日中值定理)　《30讲》P_{218}

设 $f(x)$ 满足 $\begin{cases} 在 [a,b] 上连续 \\ 在 (a,b) 上可导 \end{cases}$，则 $\exists\ \xi \in (a,b)$

使得 $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$

罗尔中值定理 > 第一类常数 K值法

（与之前不同的地方在于，约束变元的个数，之前是 $\exists \xi$，这里是 $\forall x, \exists \xi$）

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有二阶导数，证明：对 $\forall x \in (a,b)$，$\exists \xi \in (a,b)$，

使得：$\dfrac{1}{x-b}\left[\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right]=\underline{\dfrac{1}{2}f''(\xi)}$ 中值部分

换成 h

令 $\dfrac{1}{x-b}\left[\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right]=K$

把 x 换成 t，考虑构造函数 $G_1(t)$

$$G_1(t)=\frac{1}{t-b}\left[\frac{f(t)-f(a)}{t-a}-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right]-K$$

但这样 $G(t)$ 求导会很复杂，原因是：分母上有 t

$G(t)=(t-b)(t-a)\,G_1(t)$

$$=f(t)-f(a)-(t-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}-K(t-b)(t-a)$$

其中 $K=\dfrac{1}{x-b}\left[\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right]$

$$\Rightarrow G(t)=f(t)-f(a)-(t-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}-\frac{1}{x-b}\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right](t-b)(t-a)$$

找零点　$G(a)=0$，　$G(b)=0$

$$G(x)=f(x)-f(a)-(x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}-\frac{(x-b)(x-a)}{x-b}\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right]$$

$$=f(x)-f(a)-(x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}-(x-a)\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right]$$

$$=f(x)-f(a)-(x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}-(f(x)-f(a))+(x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$=0$$

其实 $G(x)=0$，从构造的过程也可以看出：

$G_1(t)=\frac{1}{t-b}\left[\frac{f(t)-f(a)}{t-a}-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right]-K$，其中 $K=\frac{1}{x-a}\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right]$

$G_1(x)=\square-\square=0$（两个一模一样的相减）

$G'(t)=f'(t)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}-K\cdot(2t-(a+b))$

$G''(t)=f''(t)-2K=f''(t)-\frac{2}{x-b}\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right]$

$G(a)=G(x)=G(b)=0$

$\exists\ \delta_1\in(a,x)$ 使得 $G'(\delta_1)=0$

$\exists\ \delta_2\in(x,b)$ 使得 $G'(\delta_2)=0$

$G'(\delta_1)=G'(\delta_2)$

$\exists\ \xi\in(\delta_1,\delta_2)$ 使得 $G''(\xi)=f''(\xi)-\frac{2}{x-b}\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right]=0$

$\Rightarrow\ \frac{1}{x-b}\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right]=\frac{1}{2}f''(\xi)$

设 $f(x)$ 在点 a 的某个邻域具有二阶导数，

证明：对充分小的 h，$\exists\ \theta\in[0,1)$，使得

$$\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}=\frac{f''(a+\theta h)+f''(a-\theta h)}{2}$$

中值部分换为 K

令 $\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}=K$

考查 $G_1(x)=\frac{f(a+x)+f(a-x)-2f(a)}{x^2}-K$

$G(x)=x^2G_1(x)=f(a+x)+f(a-x)-2f(a)-Kx^2$

$=f(a+x)+f(a-x)-2f(a)-Kx^2$

$G'(x)=f'(a+x)-f'(a-x)-2Kx$

$G''(x) = f''(a+x) + f''(a-x) - 2K$

$G(h) = 0$, $G(0) = 0$, $G(-h) = 0$

不妨设 $h > 0$

$\exists\ \delta_1 \in (-h, 0)$, $G'(\delta_1) = 0$

$\exists\ \delta_2 \in (0, h)$, $G'(\delta_2) = 0$

$G'(\delta_1) = G'(\delta_2) = 0$

$\exists\ \xi \in (\delta_1, \delta_2)$, $G''(\xi) = f''(a+\xi) + f''(a-\xi) - 2K = 0$

$\Rightarrow\ K = \dfrac{f''(a+\xi) + f''(a-\xi)}{2}$

即 $\dfrac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2} = \dfrac{f''(a+\xi) + f''(a-\xi)}{2}$

与题目结论有点差异，将 $\xi = \theta \cdot h$ 这种形式

$-h < \delta_1 < \xi < \delta_2 < h \Rightarrow -h < \xi < h \Rightarrow -1 < \frac{\xi}{h} < 1$

$\theta \cdot h = \xi \Rightarrow \theta = \frac{\xi}{h} \in (-1, 1) \Rightarrow \theta \in [0, 1)$

$f(x)$ 在区间 (x_1, x_n) 内存在 n 阶导数，在区间 $[x_1, x_n]$ 上连续，且存在 n 个不同的点 $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$，使得 $f(x_1) = f(x_2) = \cdots = f(x_n) = 0$，

证明：对 $\forall\ c \in (x_1, x_n)$， $\exists\ \xi \in (x_1, x_n)$

使得 $f(c) = \frac{1}{n!}(c-x_1)(c-x_2)(\cdots)(c-x_n) f^{(n)}(\xi)$

令 $\dfrac{f(c)}{\frac{1}{n!}(c-x_1)(\cdots)(c-x_n)} = K$

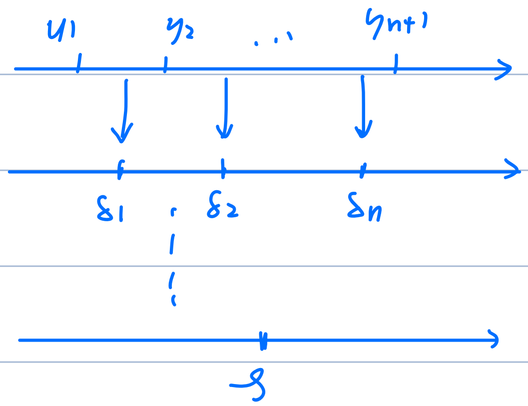
$G_1(t) = \dfrac{f(t)}{\frac{1}{n!}(t-x_1)(\cdots)(t-x_n)} - K$

$$G(t) = f(t) - K\frac{1}{n!}\cdot(t-x_1)(\cdots)(t-x_n)$$

$$G(c) = 0$$

$$G(x_1) = G(x_2) = \cdots = G(x_n) = 0$$

$\text{sort}\{c, x_1, x_2, \cdots, x_n\} = \text{sort}\{y_1, y_2, \cdots, y_{n+1}\}$ $(y_1 < y_2 < \cdots < y_{n+1}$



$G(t)$, $n+1$个零点

$G'(t)$, n个零点

$G^{(n)}$ 1个零点 $G^{(n)}(\xi) = 0$

$$G^{(n)}(t) = f^{(n)}(t) - K\cdot\frac{1}{n!}\cdot\big((c-x_1)(c-x_2)(\cdots)(c-x_n)\big)^{(n)}$$

$$= f^{(n)}(t) - K$$

$$G^{(n)}(\xi) = f^{(n)}(\xi) - K = 0$$

$$\Rightarrow f^{(n)}(\xi) = K = \frac{f(c)}{\frac{1}{n!}(c-x_1)(\cdots)(c-x_n)}$$

$$\Rightarrow f(c) = \frac{1}{n!}(c-x_1)(c-x_2)(\cdots)(c-x_n)\cdot f^{(n)}(\xi)$$

第二类常数K值法能处理第一类常数K值法所处理不了的情形

第二类常数K值法
第一步：将中值部分用常数K替换得到的式子*
第二步：对式子*进行移项，除以或乘以某一个常数，得到$F(a)=F(b)$
第三步：构造函数$F(x)$
第二类常数K值法是基于罗尔定理的一个找原函数的方法
实际上这个构造过程产生出了$F(a)=F(b)$即使用罗尔定理的条件

第一类常数K值法
第一步：将中值部分用常数K替换得到的式子*
第二步：将式子*中的某个常数s换成变量x，进行移项，除以或乘以某一个$h(x)$，得到$F(x)=0$
第三步：构造函数$F(x)$
第一类常数K值法是基于罗尔定理的一个找原函数的方法
实际上这个构造过程产生出了$F(s)=0$

例：$b>a>0$，设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)上可导

证明：$\exists\, \xi\in(a,b)$，使得 $\dfrac{1}{a-b}\begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b)\end{vmatrix} = f(\xi)-\xi f'(\xi)$

(错误示范，第一类常数K值法)

令 $\dfrac{af(b)-bf(a)}{a-b}=K$

$a\to x$

令 $G_1(x)=\dfrac{xf(b)-bf(x)}{x-b}-K$

$G(x)=(x-b)G_1(x)=xf(b)-bf(x)-K(x-b)$

$G'(x)=f(b)-bf'(x)-K$

$G(a)=0$ (由构造过程易知) $G(b)=0$

$G(a)=G(b)=0 \Rightarrow \exists\,\xi\in(a,b)$

$G'(\xi)=f(b)-bf'(\xi)-K=0 \Rightarrow K=f(b)-bf'(\xi)$

$\dfrac{af(b)-bf(a)}{a-b}=f(b)-bf'(\xi)$ 与结论不符(第一类常数K值法失效)

(第二类)

令 $\dfrac{af(b)-bf(a)}{a-b}=K$ (要化成$F(a)=F(b)$这种形式 ⇒ 分离ab!)

$af(b)-bf(a)=Ka-Kb$

$$a(f(b)-K) = b(f(a)-K)$$

$$\Rightarrow \frac{f(b)-K}{b} = \frac{f(a)-K}{a}$$

令 $F(x) = \dfrac{f(x)-K}{x}$ $\quad F'(x) = \dfrac{f'(x)\cdot x - f(x) + K}{x^2}$

$$F(a) = \frac{f(a)-K}{a} = \frac{f(a) - \dfrac{af(b)-bf(a)}{a-b}}{a} = \frac{af(a)-af(b)}{a}$$

$$= f(a) - f(b)$$

$$F(b) = \frac{f(b)-K}{b} = \frac{f(b) - \dfrac{af(b)-bf(a)}{a-b}}{b} = \frac{bf(a)-bf(b)}{b}$$

$$= f(a) - f(b)$$

也可从构造过程得出

$F(a) = F(b) \Rightarrow \exists\, \xi \in (a, b)$

$$F'(\xi) = \frac{f'(\xi)\cdot\xi - f(\xi) + K}{\xi^2} = 0$$

$$\Rightarrow K = f(\xi) - \xi\cdot f'(\xi)$$

$b > a > 0$，设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导，

证明：$\exists\, \xi \in (a,b)$ 使得 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = \dfrac{\xi^2 f'(\xi)}{ab}$

$$\frac{ab}{b-a}\left(f(b)-f(a)\right) = \xi^2 f'(\xi)$$

令 $\dfrac{ab}{b-a}\left(f(b)-f(a)\right) = K$

$$ab\,(f(b)-f(a)) = k\,(b-a)$$

$$f(b)-f(a) = k\cdot\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

$$f(b)-f(a) = \frac{k}{a}-\frac{k}{b}$$

$$f(b)+\frac{k}{b} = f(a)+\frac{k}{a}$$

令 $F(x) = f(x)+\frac{k}{x}$ $\quad F'(x) = f'(x) - \frac{k}{x^2}$

$F(a) = F(b) \Rightarrow \exists\ \xi \in (a,b)$

$$F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{k}{\xi^2} = 0 \Rightarrow k = \xi^2 f'(\xi)$$

$$\Rightarrow \frac{ab}{b-a}(f(b)-f(a)) = \xi^2 f'(\xi)$$

$$\Rightarrow \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{\xi^2 f'(\xi)}{ab}$$

注：一般能用第二类常数K值法做的题，也可以用柯西中值定理做

(柯西中值定理) 《30讲》 P219

设 $f(x)$，$g(x)$ 满足 $\begin{cases} 在[a,b]上连续 \\ 在(a,b)上可导 \\ g'(x)\neq 0 \end{cases}$，则 $\exists\ \xi\in(a,b)$

使得 $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

(另解) $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = \dfrac{f'(\xi)}{\frac{1}{\xi^2}ab}$

$$\frac{f(b)-f(a)}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}} = \frac{f'(\xi)}{\frac{1}{\xi^2}}$$

$$\frac{f(b)-f(a)}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}} = \frac{f'(\xi)}{-\frac{1}{\xi^2}}$$

$\dfrac{f(x)}{\frac{1}{x}}$ 在 $[a,b]$ 上用柯西中值定理

$$\frac{f(b)-f(a)}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}} = \frac{f'(\xi)}{-\frac{1}{\xi^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{\xi^2 f'(\xi)}{ab}$$

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导，且 $f'(x) \neq 0$

证明：$\exists\, \xi, \eta \in (a,b)$，使得 $\dfrac{f'(\xi)}{f'(\eta)} = \dfrac{e^b-e^a}{b-a}\, e^{-\eta}$

（双中值问题 $\Rightarrow$ 将 ξ 与 η 分离）

（反着分析）

$$\Leftarrow\!\!\Rightarrow\ f'(\xi) = \frac{e^b-e^a}{b-a} \cdot \frac{f'(\eta)}{e^\eta} \xLeftarrow{\text{柯西中值}} f'(\xi) = \frac{e^b-e^a}{b-a} \cdot \frac{f(b)-f(a)}{e^b-e^a}$$

$$\Leftarrow\!\!\Rightarrow\ f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

（正着做）：$\exists\, \xi \in (a,b)$ 使得 $f'(\xi) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = \dfrac{e^b-e^a}{b-a} \cdot \dfrac{f(b)-f(a)}{e^b-e^a}$

$\exists\, \eta \in (a,b)$，使得 $\dfrac{f(b)-f(a)}{e^b-e^a} = \dfrac{f'(\eta)}{e^\eta}$

$$\Rightarrow f'(\xi) = \frac{e^b-e^a}{b-a} \cdot \frac{f'(\eta)}{e^\eta}$$

设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)上可导，$0\le a<b<\frac{\pi}{2}$

证明：$\exists\,\xi,\eta\in(a,b)$，使得$f'(\eta)\tan\frac{a+b}{2}=f'(\xi)\cdot\frac{\sin\eta}{\cos\xi}$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(\eta)}{\sin\eta}\tan\frac{a+b}{2}=f'(\xi)\cdot\frac{1}{\cos\xi} \xLeftarrow{\text{柯}} \frac{f'(\eta)}{\sin\eta}\tan\frac{a+b}{2}=\frac{f(b)-f(a)}{\sin b-\sin a}$$

$$\xLeftarrow{\text{柯}} \frac{f(b)-f(a)}{\cos a-\cos b}\cdot\tan\frac{a+b}{2}=\frac{f(b)-f(a)}{\sin b-\sin a}$$

$$\Leftrightarrow \tan\frac{a+b}{2}=\frac{\cos a-\cos b}{\sin b-\sin a}$$

（和差化积）《30讲》P598

$$\frac{\cos a-\cos b}{\sin b-\sin a}=\frac{-2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}}{2\cos\frac{b+a}{2}\sin\frac{b-a}{2}}=\tan\frac{a+b}{2}$$

（正向证明）

$$\frac{\cos a-\cos b}{\sin b-\sin a}=\tan\frac{a+b}{2}$$

$$\frac{\cos a-\cos b}{\sin b-\sin a}\cdot(f(b)-f(a))=\tan\frac{a+b}{2}(f(b)-f(a))$$

$$\frac{f(b)-f(a)}{\sin b-\sin a}=\tan\frac{a+b}{2}\frac{f(b)-f(a)}{\cos a-\cos b}$$

$\exists\,\eta\in(a,b)$使得$\frac{f(b)-f(a)}{(-\cos)(b)-(-\cos a)(a)}=\frac{f'(\eta)}{\sin\eta}$

$$\frac{f(b)-f(a)}{\sin b-\sin a}=\tan\frac{a+b}{2}\cdot\frac{f'(\eta)}{\sin\eta}$$

$\exists\,\xi\in(a,b)$使得$\frac{f(b)-f(a)}{\sin b-\sin a}=\frac{f'(\xi)}{\cos\xi}$

$$\frac{f'(\xi)}{\cos\xi}=\tan\frac{a+b}{2}\cdot\frac{f'(\eta)}{\cos\eta}$$

设函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导, $g''(x) \neq 0$

证明: $\exists \xi \in (a,b)$ 使得 $\dfrac{f(b)-f(a)-(b-a)f'(a)}{g(b)-g(a)-(b-a)g'(a)} = \dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$

令 $T(x) = f(x) - f(a) - (x-a)f'(a)$, $T'(x) = f'(x) - f'(a)$, $T''(x) = f''(x)$

$S(x) = g(x) - g(a) - (x-b)f'(a)$, $S'(x) = g'(x) - g'(a)$, $S''(x) = g''(x)$

$T(a) = 0$, $S(a) = 0$, $T'(a) = 0$, $S'(a) = 0$

$\dfrac{T(b)}{S(b)} = \dfrac{T(b) - T(a)}{S(b) - S(a)}$ $\quad \exists \eta \in (a,b)$ 使得 $\dfrac{T(b)-T(a)}{S(b)-S(a)} = \dfrac{T'(\eta)}{S'(\eta)}$

$\dfrac{T(b)}{S(b)} = \dfrac{T'(\eta)}{S'(\eta)} = \dfrac{T'(\eta) - T'(a)}{S'(\eta) - S'(a)}$ $\quad \exists \xi \in (a,\eta)$ 使得 $\dfrac{T'(\eta)-T'(a)}{S'(\eta)-S'(a)} = \dfrac{T''(\xi)}{S''(\xi)}$

$\dfrac{T(b)}{S(b)} = \dfrac{T''(\xi)}{S''(\xi)} = \dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$

即 $\dfrac{f(b) - f(a) - (b-a)f'(a)}{g(b) - g(a) - (b-a)g'(a)} = \dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$

(另解, 常数 k 值法, b, a 似乎没法完全分离, 先考虑第一类)

令 $\dfrac{f(b) - f(a) - (b-a)f'(a)}{g(b) - g(a) - (b-a)g'(a)} = K$

$G(x) = f(x) - f(a) - (x-a)f'(a) - K[g(x) - g(a) - (x-a)g'(a)]$

$G'(x) = f'(x) - f'(a) - K[g'(x) - g'(a)]$

$G''(x) = f''(x) - Kg''(x)$

$G(b) = G(a) = 0 \Rightarrow \exists \eta \in (a,b)$ 使得 $G'(\eta) = 0$

$G(\eta) = G(a) = 0 \Rightarrow \exists \xi \in (a,\eta)$ 使得 $G''(\xi) = 0$

$$f''(\xi) - k g''(\xi) = 0 \Rightarrow k = \frac{f(b)-f(a)-(b-a)f'(a)}{g(b)-g(a)-(b-a)g'(a)} = \frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$$

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上三阶可导

证明：$\exists\ \xi \in (a,b)$，使得

$$f(b) = f(a) + \frac{1}{2}(b-a)(f'(a)+f'(b)) - \frac{1}{12}(b-a)^3 f'''(\xi)$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(b)-f(a)-\frac{1}{2}(b-a)(f'(a)+f'(b))}{-\frac{1}{12}(b-a)^3} = f'''(\xi)$$

令 $T(x) = f(x) - f(a) - \frac{1}{2}(x-a)(f'(x)+f'(a))$

$T(a) = 0$

$S(x) = -\frac{1}{12}(x-a)^3$

$S(a) = 0$

$\frac{T(b)}{S(b)} = \frac{T(b)-T(a)}{S(b)-S(a)}$，$\exists\ \delta \in (a,b)$ 使得 $\frac{T(b)-T(a)}{S(b)-S(a)} = \frac{T'(\delta)}{S'(\delta)}$

$$\Rightarrow \frac{T(b)}{S(b)} = \frac{T'(\delta)}{S'(\delta)}$$

$$T'(x) = f'(x) - \frac{1}{2}(f'(x)+f'(a) + (x-a)\cdot f''(x))$$

$$= \frac{1}{2}f'(x) - \frac{1}{2}f'(a) - \frac{1}{2}(x-a)f''(x)$$

$T'(a) = 0$

$S'(x) = -\frac{1}{4}(x-a)^2$

$S'(a) = 0$

$\frac{T'(\delta)}{S'(\delta)} = \frac{T'(\delta)-T'(a)}{S'(\delta)-S'(a)}$，$\exists\ \xi \in (a,\delta)$ 使得 $\frac{T'(\delta)-T'(a)}{S'(\delta)-S'(a)} = \frac{T''(\xi)}{S''(\xi)}$

$$T''(x) = \frac{1}{2}f''(x) - \frac{1}{2}f''(x) - \frac{1}{2}(x-a)f'''(x) = -\frac{1}{2}(x-a)f'''(x)$$

$$S''(x) = -\frac{1}{2}(x-a)$$

$$\frac{T'(\delta)}{S'(\delta)} = \frac{T''(\xi)}{S''(\xi)} = \frac{-\frac{1}{2}(\xi-a)\cdot f'''(\xi)}{-\frac{1}{2}(\xi-a)} = f'''(\xi)$$

(另解，第一类常数K值法)

$$\frac{f(b)-f(a)-\frac{1}{2}(b-a)(f'(b)+f'(a))}{-\frac{1}{12}(b-a)^3} = K$$

令 $G(x) = f(x)-f(a)-\frac{1}{2}(x-a)(f'(x)+f'(a)) + \frac{K}{12}(x-a)^3$

$$G'(x) = f'(x) - \frac{1}{2}(f'(x)+f'(a)) - \frac{1}{2}(x-a)f''(x) + \frac{K}{4}(x-a)^2$$

$$= \frac{1}{2}f'(x) - \frac{1}{2}f'(a) - \frac{1}{2}(x-a)f''(x) + \frac{K}{4}(x-a)^2$$

$$G''(x) = \frac{1}{2}f''(x) - \frac{1}{2}f''(x) - \frac{1}{2}(x-a)f'''(x) + \frac{K}{2}(x-a)$$

$$= -\frac{1}{2}(x-a)f'''(x) + \frac{K}{2}(x-a)$$

$G(b) = G(a) = 0 \Rightarrow \exists\, \delta \in (a,b)$ 使得 $G'(\delta) = 0$

$G'(\delta) = G'(a) = 0 \Rightarrow \exists\, \xi \in (a,\delta)$ 使得 $G''(\xi) = 0$

$$G''(\xi) = -\frac{1}{2}(\xi-a)f'''(\xi) + \frac{K}{2}(\xi-a) = 0$$

$$\xi \in (a,\delta) \Rightarrow \xi - a \neq 0$$

$$\Rightarrow f'''(\xi) = K = \frac{f(b)-f(a)-\frac{1}{2}(b-a)(f'(b)+f'(a))}{-\frac{1}{12}(b-a)^3}$$

(拉格朗日中值定理) 《30讲》 P218

设 $f(x)$ 满足 $\begin{cases} 在[a,b]上连续 \\ 在(a,b)上可导, \end{cases}$ 则 $\exists\, \xi \in (a,b)$

使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)\cdot(b-a)$

(定积分闭区间积分中值定理) 《30讲》 P255

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $\exists\, \xi \in [a,b]$

使得 $\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)$

(定积分开区间积分中值定理) (二级结论)

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $\exists\, \xi \in (a,b)$ 结论更强了

使得 $\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)$

设 $F(x)=\int_a^x f(x)\,dx$

$F(b)=\int_a^b f(x)\,dx \qquad F(a)=0$

$\Rightarrow F(b)=F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)\,dx$

$F'(x)=f(x)$

$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a) \iff \dfrac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} = \dfrac{F(b)-F(a)}{b-a}$

由拉氏，$\exists\, \xi \in (a,b)$ 使得 $\dfrac{F(b)-F(a)}{b-a}=f(\xi)$

$\iff F(b)-F(a)=f(\xi)(b-a)$

$\iff \int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)$

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=\dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$，

证明：$\exists \xi \in (a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$

（这题用闭区间的积分中值定理是不行的）

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续 $\Rightarrow \exists \delta \in [a,b]$，使得 $f(\delta)=\dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$

$f(a)=f(\delta)$，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导

$\Rightarrow \exists \xi \in (a,\delta)$ 使得 $f'(\xi)=0$

这其实伪证了，因为 $\delta \geq a$，当 $\delta=a$ 时 $(a,\delta)=\varnothing$

（开区间积分中值定理）

不同点

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续 $\Rightarrow \exists \delta \in (a,b)$，使得 $f(\delta)=\dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$

（剩下相同）

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)=1$

证明：$\exists \xi,\eta \in (a,b)$，使得 $e^{\eta-\xi}[f'(\eta)+f(\eta)]=1$

（反向分析）

（双中值 $\Rightarrow$ 分离 η,ξ） $\Leftrightarrow \dfrac{e^\eta}{e^\xi}[f'(\eta)+f(\eta)]=1$

$\Leftrightarrow e^\eta[f'(\eta)+f(\eta)]=e^\xi$

$\Leftrightarrow (e^x\cdot f(x))'\big|_{x=\eta}=(e^x)'\big|_{x=\xi}$

（正向分析） $f(x)\cdot e^x$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导

$\exists \eta \in (a,b)$ 使得 $\dfrac{f(b)\cdot e^b-f(a)\cdot e^a}{b-a}=e^\eta[f'(\eta)+f(\eta)]$ (1)

$\exists \xi \in (a,b)$ 使得 $\dfrac{e^b-e^a}{b-a}=e^\xi$ (2)

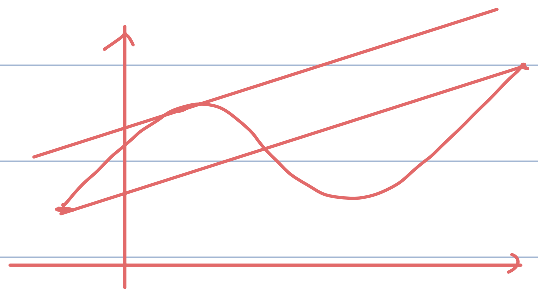
$\dfrac{(1)}{(2)}=\dfrac{f(b)e^b-f(a)e^a}{e^b-e^a}=\dfrac{e^\eta[f'(\eta)+f(\eta)]}{e^\xi}$

代入 $f(b)=f(a)=1$，$\square=1$

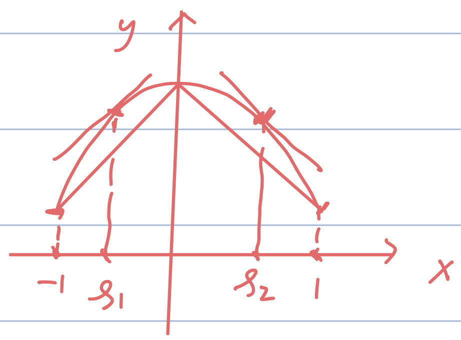
已知 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上连续，在 $(-1, 1)$ 内可导，且 $f(-1) = f(1)$

证明：$\exists\ \xi_1 \neq \xi_2 \in (-1, 1)$，使得 $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 0$

(利用拉格朗日中值定理的几何含义)



本题，画草图有弦的斜率成相反数



$\exists\ \xi_1 \in (-1, 0)$ 使得 $f'(\xi_1) = \dfrac{f(0) - f(-1)}{0 - (-1)} = f(0) - f(-1)$

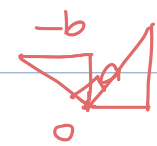
$\exists\ \xi_2 \in (0, 1)$ 使得 $f'(\xi_2) = \dfrac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = f(1) - f(0)$

$f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 0$

已知 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上可导，$f(-b) = a$，$f(a) = b$，$f(0) = 0$，$a > 0$，$b > 0$

证明：$\exists\ \xi_1 \neq \xi_2 \in (-b, a)$，使得 $f'(\xi_1) \cdot f'(\xi_2) = -1$ 找到两个正交的弦

$$\frac{f(0) - f(-b)}{0 - (-b)} \cdot \frac{f(a) - f(0)}{a - 0} = \frac{-a}{b} \cdot \frac{b}{a} = -1$$



$\exists\ \xi_1 \in (-b, 0)$ 使得 $f'(\xi_1) = \dfrac{f(0) - f(-b)}{0 - (-b)} = \dfrac{-a}{b}$

$\xi_2 \quad (0, a) \qquad f'(\xi_2) = \dfrac{f(a) - f(0)}{a - 0} = \dfrac{b}{a}$

$f'(\xi_1) \cdot f'(\xi_2) = \left(-\dfrac{a}{b}\right)\left(\dfrac{b}{a}\right) = -1$

已知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$.

证明：$\exists\ \xi_1 \neq \xi_2 \in (0,1)$，使得 $f'(\xi_1)\cdot f'(\xi_2)=1$

(反向分析) $\xleftarrow{\text{两次拉}}$ $\dfrac{f(c)-f(0)}{c-0}\cdot\dfrac{f(1)-f(c)}{1-c}=1$

$$\frac{f(c)}{c}\cdot\frac{1-f(c)}{1-c}=1$$

$\Leftrightarrow\ f(c)\cdot(1-f(c))=c(1-c)$

$\Leftrightarrow\ f(c)-f^2(c)=c-c^2$

$\Leftrightarrow\ f(c)-c=f^2(c)-c^2$

$\Leftrightarrow\ f(c)-c=(f(c)-c)(f(c)+c)$

$\Leftrightarrow\ 1=f(c)+c \Leftrightarrow f(c)+c-1=0$

(正向做)：令 $G(x)=f(x)+x-1=0$

$G(0)=f(0)+0-1=-1 \qquad G(1)=f(1)+1-1=1$

$G(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$G(0)\cdot G(1)<0$

$\Rightarrow \exists\ c\in(0,1)$ 使得 $G(c)=0 \Rightarrow f(c)+c-1=0$

$f(x)$ 在 $[0,c]$ 上连续，在 $(0,c)$ 上可导，

$\exists\ \xi_1\in(0,c)$ 使得 $f'(\xi_1)=\dfrac{f(c)-f(0)}{c-0}=\dfrac{f(c)}{c}$

$f(x)$ 在 $[c,1]$ 上连续，在 $(c,1)$ 上可导，

$\exists\ \xi_2\in(c,1)$ 使得 $f'(\xi_2)=\dfrac{f(1)-f(c)}{1-c}=\dfrac{1-f(c)}{1-c}$

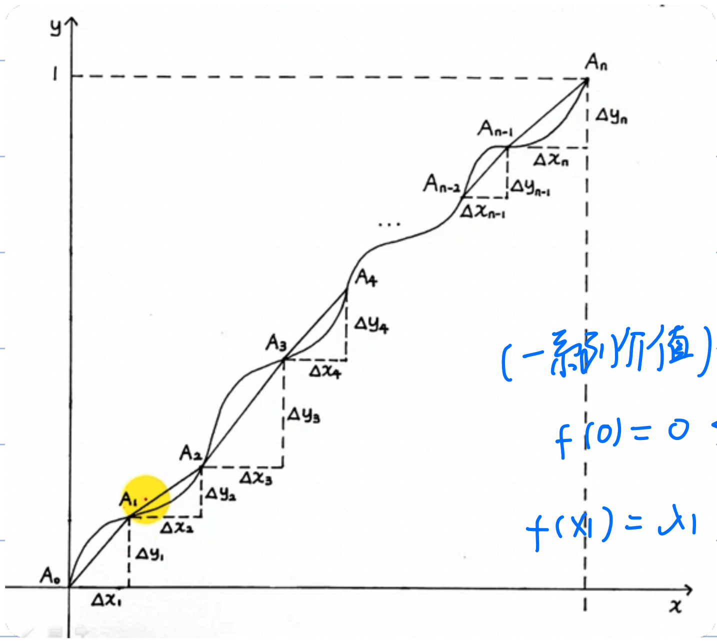
$$f'(\xi_1)\cdot f'(\xi_2)=\frac{f(c)}{c}\cdot\frac{1-f(c)}{1-c}=\frac{f(c)-f^2(c)}{c(1-c)}=\frac{(1-c)-(1-c)^2}{c(1-c)}=1$$

f(x)在[0,1]上连续，在(0,1)上可导，且 $f(0)=0$, $f(1)=1$,

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 为n个正数且 $\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n=1$

证明：在区间(0,1)内存在一组互不相等的数 $\xi_1, \xi_2 \cdots \xi_n$

使得 $\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{f'(\xi_k)} = 1$ （反向分析）$\Leftarrow$想 $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \frac{\Delta x_k}{\Delta y_k} = 1$



其中 $\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = \sum_{k=1}^{\infty} \Delta y_k = 1$

若有 $\frac{\lambda_k}{\Delta y_k} = 1$ 则 $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \frac{\Delta x_k}{\Delta y_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \Delta x_k = 1$

若 $\lambda_k = \Delta y_k$ 则 $y_k = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i$

$y_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ 正好是A_n

（一系列介值）

$f(0)=0<\lambda_1<1=f(1) \Rightarrow \exists x_1 \in (0,1)$ 使得 $f(x_1)=\lambda_1$

$f(x_1)=\lambda_1 < \lambda_1+\lambda_2 < 1 = f(1) \Rightarrow \exists x_2 \in (x_1,1)$, $f(x_2)=\lambda_1+\lambda_2$

....

（介值定理）<<30讲>> P212

f(x)在[a,b]上连续，则 $\exists \xi \in [a,b]$，使得 $f(\xi)=\mu$, $m \le \mu \le M$

其中 $m=\min\{f(a),f(b)\}$, $M=\max\{f(a),f(b)\}$

（正向做）$f(0)=0<\lambda_1<1=f(1) \Rightarrow \exists x_1 \in (0,1)$, $f(x_1)=\lambda_1$

$f(x_1)=\lambda_1<\lambda_1+\lambda_2<1=f(1) \Rightarrow \exists x_2 \in (x_1,1)$, $f(x_2)=\lambda_1+\lambda_2$

...

$f(x_{n-1}) < f(x_{n-1})+\lambda_n < 1=f(1) \Rightarrow \exists x_{n-1} \in (x_{n-2},1)$, $f(x_{n-1})=\lambda_1+\dots+\lambda_{n-1}$

拉格朗日中值定理

$$\frac{f(x_1)-f(0)}{x_1-0} = f'(\xi_1) = \frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} = \frac{\lambda_1}{\Delta x_1}$$

...

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{f'(\lambda_k)} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot \left(\frac{\Delta x_k}{\lambda_k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = 1$$

达布定理：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导且 $f'(a) \neq f'(b)$，

则对 $\forall \lambda$，$\min\{f'(a), f'(b)\} < \lambda < \max\{f'(a), f'(b)\}$

$\exists \xi \in (a,b)$ 使得 $f'(\xi) = \lambda$

不可用介值定理证明，因为没有 $f'(x)$ 连续。

这就是达布定理的重要性

达布定理推论1：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，{不要求 $f'(a) \neq f'(b)$}

则对 $\forall \lambda$，$\min\{f'(a), f'(b)\} \underset{\sim}{\overset{< \to \leq}{\leq}} \lambda \leq \max\{f'(a), f'(b)\}$

$\exists \xi \in \overset{< \to \leq}{[a,b]}$ 使得 $f'(\xi) = \lambda$

（可通过分类讨论证明）

达布定理推论2：设 $f(x)$ 在 (a,b) 上可导，若不 $\exists \xi \in (a,b)$ 使得 $f'(\xi) = \lambda$

则在 (a,b) 上，恒有 $f'(x) > \lambda$ 或 $f'(x) < \lambda$

（可用反证法证明）

设 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，$\exists c \in (a,b)$，使得 $F'(c) + \frac{F(c)}{b-a} = 0$，

$F(a) = 0$，证明：$\exists \xi \in (a,b)$，使得 $F'(\xi) = 0$

$$F'(c) = \frac{-F(c)}{b-a}$$

① $F(c) = 0 \Rightarrow F'(c) = 0 \Rightarrow \xi = c$，

② $F(c) > 0 \Rightarrow F'(c) = \frac{-F(c)}{b-a} < 0$

由达布定理的条件，还需找到一点 $F'(\delta) > 0$

$F(x)$ 在 $[a,c]$ 上连续，在 (a,c) 上可导 (拉)

$\Rightarrow \exists\, \delta \in (a,c)$, $\dfrac{F(c)-F(a)}{c-a} = \dfrac{F(c)}{c-a} = F'(\delta) > 0$

$F(x)$ 在 (δ, c) 上可导， $F'(c) < 0 < F'(\delta)$

$\Rightarrow \exists\, \xi \in (\delta, c)$, $F'(\xi) = 0$

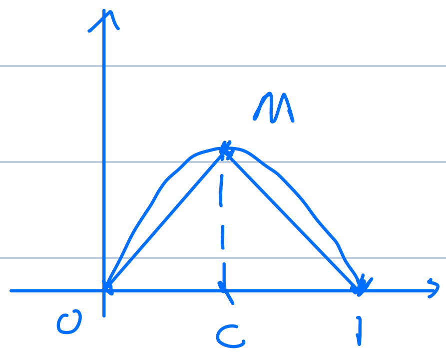
③ $F(c) < 0$ ，与 ② 同理

$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 上可导， $f(0)=f(1)=0$，

$M = \max\limits_{x\in[0,1]} f(x)$ ，证明： $\exists\, \xi \in (0,1)$ 使得 $f'(\xi) = M$

① $M > 0$

设 $c \in [0,1]$ ， $f(c) = M$



$f(x)$ 在 $[0,c]$ 上连续，在 $(0,c)$ 上可导

$\exists\, \delta_1 \in (0,c)$ ， $f'(\delta_1) = \dfrac{f(c)-f(0)}{c-0} = \dfrac{M}{c}$

$f(x)$ 在 $[c,1]$ 上连续，在 $(c,1)$ 上可导

$\exists\, \delta_2 \in (c,1)$, $f'(\delta_2) = \dfrac{f(1)-f(c)}{1-c} = \dfrac{-M}{1-c}$

$\dfrac{-M}{1-c} < 0 < M < \dfrac{M}{c}$ $(c \in (0,1))$

$\Rightarrow f'(\delta_2) < M < f'(\delta_1)$

$f(x)$ 在 $[\delta_1, \delta_2]$ 上可导， $f'(\delta_2) < M < f'(\delta_1)$

$\Rightarrow \exists\, \xi \in [\delta_1, \delta_2]$ 使得 $f'(\xi) = M$

② $M = 0$

$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 上可导， $f(0)=f(1)=0$

$\exists\, \xi \in (0,1)$ ， $f'(\xi) = 0$

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导，且 $f(a)=f(b)=0$

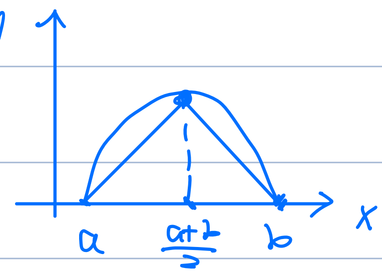
证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $(b-a)f'(\xi) = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$

① $f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$

$\exists\, \xi\in(a,b)$，$f'(\xi)=0 \Rightarrow (b-a)f'(\xi)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ （罗尔中值）

② $f\left(\frac{a+b}{2}\right)>0$

即证 $\exists\, \xi\in(a,b)$，$f'(\xi)=\frac{1}{b-a}f\left(\frac{a+b}{2}\right)$



$f(x)$ 在 $\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$ 上连续，在 $\left(a,\frac{a+b}{2}\right)$ 上可导

$\Rightarrow \exists\, \delta_1\in\left(a,\frac{a+b}{2}\right)$，

$$f'(\delta_1)=\frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f(a)}{\frac{a+b}{2}-a}=\frac{2f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{b-a}$$

$f(x)$ 在 $\left[\frac{a+b}{2},b\right]$ 上连续，在 $\left(\frac{a+b}{2},b\right)$ 上可导

$\Rightarrow \exists\, \delta_2\in\left(\frac{a+b}{2},b\right)$

$$f'(\delta_2)=\frac{f(b)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{b-\frac{a+b}{2}}=\frac{-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{b-a}$$

$$\frac{-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{b-a}<0<\frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{b-a}<\frac{2f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{b-a}$$

$$\Leftrightarrow \quad f'(\delta_2)<\frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{b-a}<f'(\delta_1)$$

$f(x)$ 在 $[\delta_1,\delta_2]$ 上可导，$f'(\delta_2)<\frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{b-a}<f'(\delta_1)$

$\Rightarrow \exists\, \xi\in[\delta_1,\delta_2]$，$f'(\xi)=\frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{b-a} \Rightarrow (b-a)f'(\xi)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)$

③ $f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$ 同理

泰勒中值定理

将 $f(\alpha)$ 在 β 处展开

α、β 是区间端点／区间中点／极值点

（泰勒公式）《30讲》P220

设 $f(x)$ 在 x_0 处 $n+1$ 阶可导，则对 $\forall x \in U(x_0, \delta)$

$$f(x) = f(x_0) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

其中 $\xi_x \in (x, x_0)$ $(x < x_0)$

$f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上有三阶连续导数，且 $f(-1)=0$，$f(1)=1$，$f'(0)=0$

证明：$\exists \xi \in (-1,1)$，使得 $f'''(\xi)=3$

$$f(x) = f(0) + f'(0)\cdot x + \frac{f''(0)\cdot x^2}{2} + \frac{f'''(\xi)}{6}x^3$$

$$= f(0) + \frac{1}{2}f''(0) + \frac{1}{6}f'''(\xi)$$

$$f(1) = f(0) + \frac{1}{2}f''(0) + \frac{1}{6}f'''(\xi_1) \qquad \xi_1 \in (0,1)$$

$$f(-1) = f(0) + \frac{1}{2}f''(0) - \frac{1}{6}f'''(\xi_2) \qquad \xi_2 \in (-1,0)$$

$$f(1) - f(-1) = 1 = \frac{1}{6}\left(f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)\right)$$

$$\Rightarrow f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2) = 6 \Rightarrow \frac{f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)}{2} = 3$$

均值 $\Rightarrow$ 介值定理 $\Rightarrow$ $\min\{f'''(\xi_1), f'''(\xi_2)\} \le \dfrac{f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)}{2} \le \max\{f'''(\xi_1), f'''(\xi_2)\}$

介值定理推广，$f'''(x)$ 在 $[\xi_2, \xi_1]$ 上连续

$$\exists \xi \in [\xi_2, \xi_1], \quad f'''(\xi) = \frac{f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)}{2} = 3$$

（平均值定理）《30讲》P12

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，当 $a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b$ 时，

$\exists \xi \in [x_1, x_n]$ 使得 $f(\xi) = \dfrac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}$

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上三阶可导且 $f'(a)=f'(b)=f''(a)=f''(b)=0$

证明：$\exists\ \xi\in[a,b]$，使得 $f(b)-f(a)=\frac{1}{18}(b-a)^3 f'''(\xi)$

$$f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2}f''(a)+\frac{(x-a)^3}{6}f'''(\xi_1),\ \xi_1\in(a,x)$$

$$=f(a)+\frac{(x-a)^3}{6}f'''(\xi_1),\ \xi_1\in(a,x) \qquad (1)$$

$$f(x)=f(b)+(x-b)f'(b)+\frac{(x-b)^2}{2}f''(b)+\frac{(x-b)^3}{6}f'''(\xi_2),\ \xi_2\in(x,b)$$

$$=f(b)+\frac{(x-b)^3}{6}f'''(\xi_2),\ \xi_2\in(x,b) \qquad (2)$$

(2) − (1) 得 $0=f(b)-f(a)+\frac{(x-b)^3}{6}f'''(\xi_2)-\frac{(x-a)^3}{6}f'''(\xi_1)$

$\Rightarrow f(b)-f(a)=\frac{(x-a)^3}{6}f'''(\xi_1)+\frac{(b-x)^3}{6}f'''(\xi_2)$ 记为 K

记 $m=\min\{f'''(\xi_1),f'''(\xi_2)\}$，$M=\max\{f'''(\xi_1),f'''(\xi_2)\}$

$$S=\frac{(x-a)^3}{6}+\frac{(b-x)^3}{6}$$

$$mS\le K\le MS \Rightarrow m\le\frac{K}{S}\le M$$

（不可用介值定理，因为没说三阶导连续）

由达布定理：$\exists\ \xi\in[\xi_1,\xi_2]$ 使得 $f'''(\xi)=\frac{K}{S} \Rightarrow Sf'''(\xi)=K$

$$f'''(\xi)\cdot\left[\frac{(x-a)^3}{6}+\frac{(b-x)^3}{6}\right]=f(b)-f(a)$$

解出 $\frac{(x-a)^3}{6}+\frac{(b-x)^3}{6}=\frac{1}{18}(b-a)^3$ 中的 x 即可

$$\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^3+\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^3=\frac{1}{3}$$

令 $\frac{x-a}{b-a}=t \Rightarrow \frac{b-x}{b-a}=1-t$

$$t^3+(1-t)^3=t^3+1-3t+3t^2-t^3=\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow 9t^2-9t+2=0 \Rightarrow t=\frac{9\pm\sqrt{81-72}}{18}=\frac{9\pm3}{18}=\frac{1}{3}\text{ 或 }\frac{2}{3}$$

$$\frac{x-a}{b-a}=\frac{1}{3} \Rightarrow x=\frac{2a+b}{3}\text{ 或 }\frac{a+2b}{3}$$

$f(x)$在$[0,1]$上有一阶连续导数，且$f(0)=0$

证明：$\exists \xi \in (0,1)$，使得 $f'(\xi)=2\int_0^1 f(x)dx$ （难点：积分符号的处理）

令 $G(x)=\int_0^x f(x)dx$ $\quad G'(x)=f(x)$ $\quad f(0)=0 \Leftrightarrow G'(0)=0$

$f'(\xi)=2\int_0^1 f(x)dx \Leftrightarrow G''(\xi) \Leftrightarrow 2G(1)$ ， $G(0)=0$

$G(x)=G(0)+G'(0)\cdot x+\frac{1}{2}G''(\delta)\cdot x^2$ ， $\delta \in (0,x)$

$G(1)=G(0)+G'(0)+\frac{1}{2}G''(\delta)=\frac{1}{2}G''(\delta)$

$\Rightarrow \quad 2G(1)=G''(\xi)$

（另解，原函数法）

令 $A=\int_0^1 f(x)dx$

$f'(x)-2A=0$

$f(x)-2Ax=C_1$

令 $G(x)=f(x)-2Ax$ ， $G(0)=0$ 还要找一点

$\int_0^1 G(x)dx=\int_0^1 f(x)dx-Ax^2\Big|_0^1=A-A=0$

由开区间积分中值定理

$\exists \delta \in (0,1)$ 使得 $G(\delta)=\int_0^1 G(x)dx=0$

$G(0)=G(\delta)=0$

$\Rightarrow \exists \xi \in (0,\delta)$ 使得 $G'(\xi)=f'(\xi)-2A=0$

$\Rightarrow f'(\xi)=2A=2\int_0^1 f(x)dx$

$f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上有三阶连续导数，证明 $\exists \xi \in (-1,1)$

使得 $\int_{-1}^{1} x f(x) dx = \frac{2}{3} f'(\xi) + \frac{1}{3}\xi \cdot f''(\xi)$

令 $G(x) = \int_{-1}^{x} t f(t) dt$

$G'(x) = x f(x)$

$G''(x) = f(x) + x \cdot f'(x)$

$G^{(3)}(x) = f'(x) + f'(x) + x \cdot f''(x) = 2f'(x) + x f''(x)$

即证 $\exists \xi \in (-1,1)$，使得 $G(1) = \frac{1}{3} G^{(3)}(\xi)$

$G(-1) = 0$，$G'(0) = 0$

$G(x) = G(0) + G'(0) \cdot x + \frac{G''(0)}{2} x^2 + \frac{G^{(3)}(\xi)}{6} x^3$，$\xi \in (0,x)$ 或 $\xi \in (x,0)$

$G(1) = G(0) + G'(0) + \frac{G''(0)}{2} + \frac{G^{(3)}(\delta_1)}{6}$，$\delta_1 \in (0,1)$

$G(-1) = G(0) - G'(0) + \frac{G''(0)}{2} - \frac{G^{(3)}(\delta_2)}{6}$，$\delta_2 \in (-1,0)$

$G(1) - G(-1) = 2G'(0) + \frac{G^{(3)}(\delta_1)}{6} + \frac{G^{(3)}(\delta_2)}{6}$

$G(1) = \frac{G^{(3)}(\delta_1)}{6} + \frac{G^{(3)}(\delta_2)}{6} = \frac{1}{3}\left(\frac{G^{(3)}(\delta_1) + G^{(3)}(\delta_2)}{2}\right)$

记 $m = \min\{G^{(3)}(\delta_1), G^{(3)}(\delta_2)\}$

$M = \max\{G^{(3)}(\delta_1), G^{(3)}(\delta_2)\}$

$K = \frac{G^{(3)}(\delta_1) + G^{(3)}(\delta_2)}{2}$

$m \le K \le M$

$G^{(3)}(x) = 2f'(x) + x \cdot f''(x)$ 连续

(介值) $\Rightarrow \exists \xi \in [\delta_2, \delta_1]$ 使得 $G^{(3)}(\xi) = K = \frac{G^{(3)}(\delta_1) + G^{(3)}(\delta_2)}{2}$

从而 $G(1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{G^{(3)}(\delta_1) + G^{(3)}(\delta_2)}{2} = \frac{1}{3} \cdot G^{(3)}(\xi)$

设 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ $(a>0)$ 上有二阶连续导数，$f(0)=0$。

证明：$\exists\ \xi\in[-a,a]$，使得 $a^3 f''(\xi) = 3\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$

令 $G(x) = \int_{-a}^{x} f(t)\,dt$ $\quad G(-a)=0$

$G'(x) = f(x) \quad G(0)=0$

$G''(x) = f'(x)$

$G^{(3)}(x) = f''(x)$

即证 $\exists\ \xi\in[-a,a]$，使得 $G(a) = \frac{a^3}{3} G^{(3)}(\xi)$

$G(x) = G(0) + G'(0)\cdot x + \frac{G''(0)}{2}x^2 + \frac{G^{(3)}(\delta)}{6}x^3$，$\delta\in(0,x)$ 或 $\delta\in(x,0)$

$G(a) = G(0) + G'(0)\cdot a + \frac{G''(0)}{2}a^2 + \frac{G^{(3)}(\delta_1)}{6}a^3$，$\delta_1\in(0,a)$

$G(-a) = G(0) - G'(0)\cdot a + \frac{G''(0)}{2}\cdot a^2 - \frac{G^{(3)}(\delta_2)}{6}\cdot a^3$，$\delta_2\in(-a,0)$

$G(a) - G(-a) = 2G'(0)\cdot a + \frac{a^3}{3}\left[\frac{G^{(3)}(\delta_1)+G^{(3)}(\delta_2)}{2}\right]$

$G(a) = \frac{a^3}{3}\left[\frac{G^{(3)}(\delta_1)+G^{(3)}(\delta_2)}{2}\right]$

记 $m = \min\{G^{(3)}(\delta_1), G^{(3)}(\delta_2)\}$

$M = \max\{G^{(3)}(\delta_1), G^{(3)}(\delta_2)\}$

$K = \frac{G^{(3)}(\delta_1)+G^{(3)}(\delta_2)}{2}$

$m \le K \le M$

(介值) $\exists\ \xi\in[\delta_2,\delta_1]$ 使得 $G^{(3)}(\xi) = K = \frac{G^{(3)}(\delta_1)+G^{(3)}(\delta_2)}{2}$

从而 $G(a) = \frac{a^3}{3}\,\frac{G^{(3)}(\delta_1)+G^{(3)}(\delta_2)}{2} = \frac{a^3}{3}\cdot G^{(3)}(\xi)$

中值问题 > 多项式拟合法

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶连续导数且 $f(0)=0$，$f(1)=1$，$\int_0^1 f(x)dx=1$

证：(2) 存在 $\eta\in(0,1)$，使得 $f''(\eta)<2$

(第一种拟合法)

$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续 $\Rightarrow \exists\theta\in[0,1]$ 使得 $f(\theta)=1$ 都是这样设的

(分析) 待定系数设拟合函数 $g(x)=f(x)-(ax^2+bx+c)$

$g(0)=f(0)-c=\underline{0}$ 最后这个0是：我们希望 $g(0)=g(1)=g(\theta)=0$ 罗尔中值

$\Rightarrow c=f(0)=0$

$g(1)=f(1)-(a+b+c)=1-(a+b)=0 \Rightarrow a+b=1$

$g(\theta)=f(\theta)-(a\theta^2+b\theta+c)=1-(a\theta^2+b\theta)=0 \Rightarrow a\theta+b=\frac{1}{\theta}$

$\Rightarrow a=\frac{-1}{\theta}$, $b=\frac{\theta+1}{\theta}$

(开始做题) 令 $g(x)=f(x)-\left(-\frac{1}{\theta}x^2+\left(\frac{\theta+1}{\theta}\right)x\right)$

$g'(x)=f'(x)-\left(\frac{-2}{\theta}\cdot x+\left(\frac{\theta+1}{\theta}\right)\right)$

$g''(x)=f''(x)+\frac{2}{\theta}$

$g(0)=g(\theta)=g(1)=0$

$\Rightarrow \exists\xi_1\in(0,\theta)$，$g'(\xi_1)=0$

$\exists\xi_2\in(\theta,1)$，$g'(\xi_2)=0$

$g'(\xi_1)=g'(\xi_2)=0$

$\Rightarrow \exists\eta\in(\xi_1,\xi_2)$，$g''(\eta)=f''(\eta)+\frac{2}{\theta}=0$

$f''(\eta)=-\frac{2}{\theta}$，$\theta\in(0,1)\Rightarrow\frac{1}{\theta}\in(1,+\infty)\Rightarrow\left(\frac{-2}{\theta}\right)\in(-\infty,-2)$

$\Rightarrow f''(\eta)=\frac{-2}{\theta}\in(-\infty,-2)$

(第二种拟合法)

(分析) 设 $g(x) = f(x) - (ax^2+bx+c)$，反解 a,b,c

这三个等式都是自己构造出来的，有一定的随意性

$g(0) = f(0) - c = 0 \Rightarrow c = 0$

$g(1) = f(1) - (a+b+c) \Rightarrow a+b=1$

$\int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 f(x) - (ax^2+bx+c)\,dx$

$= \int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 ax^2+bx+c\,dx = 1 - (\frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + cx)\Big|_0^1$

$= 1 - (\frac{a}{3} + \frac{b}{2}) = 0 \Rightarrow \frac{a}{3} + \frac{b}{2} = 0$

$\Rightarrow a = -3,\ b = 4$

(开始做题) 设 $g(x) = f(x) - (-3x^2+4x) = f(x)+3x^2-4x$

开区间的积分中值定理，为了防止 $\theta=0$ 或 1

$\int_0^1 g(x)dx = 0 \Rightarrow \exists\, \theta \in (0,1)$，使得 $g(\theta) = 0$

$g(0) = g(1) = g(\theta) = 0$

$\Rightarrow \exists\, \xi_1 \in (0,\theta),\quad g'(\xi_1) = 0$

$\exists\, \xi_2 \in (\theta,1),\quad g'(\xi_2) = 0$

$g'(x) = f'(x) + 6x - 4$

$g''(x) = f''(x) + 6$

$g'(\xi_1) = g'(\xi_2) = 0$

$\Rightarrow \exists\, \eta \in (\xi_1,\xi_2),\quad g''(\eta) = f''(\eta) + 6 = 0$

得到了一个相当强的结论

$\Rightarrow f''(\eta) = -6 < -2$

其实核心就在于，$g(x) = f(x) - (ax^2+bx+c)$，并确定一组 $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ 即可

根据条件列等式，解出

(另解，对结论拟合，上面都是对条件拟合)

(分析) 考虑 $g''(x) = f''(x) + 2$，即证 $\exists\, \eta \in (0,1)$，使得 $g''(\eta) < 0$

$g''(\eta) < 0$ 令人浮想联篇，$g'(x)\downarrow$，$g(x)$ 上凸

设 $g''(x) = f''(x) - 2a = f''(x) + 2 \Rightarrow a = -1$

$g(0) = f(0) - c$ ， $g(1) = f(1) - (-1 + b + c)$

如果不能做，还要进行调整

不妨设 $b = c = 0$ ， $g(0) = 0$ ， $g(1) = f(1) + 1 = 2$

（开始做题）设 $g(x) = f''(x) + x^2$

$g(0) = 0$ ， $g(1) = 1$ ，

$\int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 x^2 dx = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$

（反证，凹凸性）假设对 $\forall x \in (0,1)$ $g''(x) \geqslant 0$ （下凸函数）

由下凸函数性质： $g(x) \leqslant \frac{g(1) - g(0)}{1 - 0} x = 2x$

$\Rightarrow \int_0^1 g(x)dx \leqslant \int_0^1 2x dx$

$\Rightarrow \frac{4}{3} \leqslant 1$ （矛盾）

从而 $\exists \eta \in (0,1)$ 使得 $g''(\eta) < 0 \Rightarrow f''(\eta) < -2$

（另一种反证，单调性）假设对 $\forall x \in (0,1)$， $g''(x) \geqslant 0 \Rightarrow g'(x) \nearrow$

$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，开区间积分中值

$\exists \theta \in (0,1)$ $f(\theta) = \int_0^1 f(x)dx = 1$

$g(\theta) = f(\theta) + \theta^2 = 1 + \theta^2$

拉：$\exists \xi_1 \in (0, \theta)$， $g'(\xi_1) = \frac{g(\theta) - g(0)}{\theta - 0} = \frac{1 + \theta^2}{\theta} = \frac{1}{\theta} + \theta$

$\exists \xi_2 \in (\theta, 1)$， $g'(\xi_2) = \frac{g(1) - g(\theta)}{1 - \theta} = \frac{1 - \theta^2}{1 - \theta} = 1 + \theta$

$g'(x) \nearrow \Rightarrow g'(\xi_1) \leqslant g'(\xi_2)$ 与 $\frac{1}{\theta} + \theta \geqslant 1 + \theta$ 矛盾

（另解，同时和结论和条件拟合）

$g(x) = f(x) - (ax^2 + bx + c)$

和结论拟合，有 $a = -1$

$g(0) = f(0) - c = -c$

$g(1) = f(1) - (a+b+c) = f(1) + 1 - (b+c) = 2-b-c$

$\int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx - \int_0^1 (ax^2+bx+c)\,dx = 1 - \int_0^1 (-x^2+bx+c)\,dx$

$= 1 + \frac{1}{3} - \frac{b}{2} - c = \frac{4}{3} - \frac{b}{2} - c$

设 $g(0)=0$, $g(1)=0 \Rightarrow b=2,\ c=0$

(开始做题)： 设 $g(x) = f(x) + x^2 - x$

$g(0) = g(1) = 0 \qquad \int_0^1 g(x)\,dx = \frac{1}{3}$

$g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，由开区间积分中值定理

$\exists\, \theta \in (0,1)$, $g(\theta) = \frac{1}{3}$

拉，$\exists\, \delta_1 \in (0,\theta)$, $g'(\delta_1) = \frac{g(\theta)-g(0)}{\theta} = \frac{1}{3\theta} > 0$

$\exists\, \delta_2 \in (\theta,1)$, $g'(\delta_2) = \frac{g(1)-g(\theta)}{1-\theta} = \frac{-\theta}{1-\theta} < 0$

拉，$\exists\, \eta \in (\delta_1,\delta_2)$, $g''(\eta) = \frac{g'(\delta_2)-g'(\delta_1)}{\delta_2-\delta_1} < 0$

$g''(\eta) = f''(\eta) + 2 < 0 \Rightarrow f''(\eta) < -2$

因为是用结论拟合的

(另解，泰勒中值定理)

$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，由开区间积分中值定理

$\exists\, \theta \in (0,1)$, $f(\theta) = \int_0^1 f(x)\,dx = 1$

$f(x) = f(\theta) + f'(\theta)\cdot(x-\theta) + \frac{f''(\delta)}{2}\cdot(x-\theta)^2$, δ 介于 x 与 θ 之间

$f(0) = f(\theta) - f'(\theta)\cdot\theta + \frac{f''(\delta_1)}{2}\theta^2$, $\delta_1 \in (0,\theta)$

$f'(\theta) = 1 + \frac{f''(\delta_1)}{2}\theta$

$f(1) = f(\theta) + f'(\theta)(1-\theta) + \frac{f''(\delta_2)}{2}(1-\theta)^2$, $\delta_2 \in (\theta,1)$

$f'(\theta) = \frac{f''(\delta_2)}{2}\cdot(\theta-1)$

$1 + \frac{f''(\delta_1)}{2}\theta = \frac{f''(\delta_2)}{2}(\theta-1)$

$\Rightarrow \quad f''(\delta_1) + f''(\delta_2)(1-\theta) = -2$

记 $m = \min\{f''(\delta_1), f''(\delta_2)\}$ $\quad M = \max\{f''(\delta_1), f''(\delta_2)\}$

$m \leq f''(\delta_1) + f''(\delta_2)(1-\theta) \leq M$

(介值定理) $\exists\, \eta \in [\delta_1, \delta_2]$，使得 $f''(\eta) = -2 \leq -2$ 得证

(另解，泰勒中值定理)

$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，由开区间积分中值定理

$\exists\, \theta \in (0,1)$, $\quad f(\theta) = \int_0^1 f(x)\,dx = 1$

记 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值为 M $(M \geq 1)$

1) $M > 1$, $\exists\, \delta \in (0,1)$ 使得 $f(\delta) = M$

2) $M = 1$, $\quad f(\theta) = 1 = M$

综 1) 2), $\exists\, \delta \in (0,1)$ 使得 $f(\delta) = M$

(费马定理) $f'(\delta) = 0$

(分析) 待定 $f(\alpha)$ 在 δ 处展开

$$f(\alpha) = f(\delta) + f'(\delta)(\alpha-\delta) + \frac{f''(\eta)}{2}\cdot(\alpha-\delta)^2$$ ，η 介于 α 与 δ 之间

$$= f(\delta) + \frac{f''(\eta)}{2}(\alpha-\delta)^2$$

$$\Rightarrow \quad f''(\eta) = \frac{2(f(\alpha) - f(\delta))}{(\alpha-\delta)^2}$$

$\alpha \in (0,1)$, $\delta \in (0,1) \Rightarrow |\alpha-\delta| < 1 \Rightarrow (\alpha-\delta)^2 < 1 \Rightarrow \dfrac{1}{(\alpha-\delta)^2} > 1$

$f(\alpha) \leq f(\delta) \Rightarrow f(\alpha) - f(\delta) \leq 0$

$\dfrac{2(f(\alpha)-f(\delta))}{(\alpha-\delta)^2} \leq 2(f(\alpha) - f(\delta)) = 2f(\alpha) - 2f(\delta)$

$f(\delta) \geq 1 \Rightarrow -2f(\alpha) \leq -2 \Rightarrow 2f(\alpha) - 2f(\delta) \leq 2f(\alpha) - 2$

当 $\alpha = 0$ 时 $f(\alpha) = 0$ 满足 $f''(\eta) = \dfrac{2(f(\alpha)-f(\delta))}{(\alpha-\delta)^2} \leq 2f(\alpha) - 2 = -2$

(开始做题) $0 = f(0) = f(\delta) - \delta f'(\delta) + \dfrac{\delta^2}{2} f''(\eta)$, $\eta \in (0, \delta)$

$$\Rightarrow f''(\eta) = \frac{-2f(\delta)}{\delta^2} \le -2f(\delta) \le -2$$ 得证

中值问题 > 分部积分公式推广

$$\int_0^1 f''(x)\, p(x) = \int_0^1 f(x)\, p''(x)\, dx + f'(x)p(x)\Big|_0^1 - f(x)\cdot p'(x)\Big|_0^1$$

表格积分法

$p(x)$	$p'(x)$	$p''(x)$
$f''(x)$	$f'(x)$	$f(x)$

$$I = p(x)\cdot f'(x) - p'(x)\cdot f(x) + \int p''(x)\cdot f(x)\, dx$$

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶连续导数且 $f(0)=0$, $f(1)=1$, $\int_0^1 f(x)\,dx = 1$

证明：(2) 存在 $\eta \in (0,1)$，使得 $f''(\eta) < -2$

$$\int_0^1 f''(x)p(x)\, dx = \int_0^1 f(x)\cdot p''(x)\, dx + f'(x)\cdot p(x)\Big|_0^1 - f(x)\cdot p'(x)\Big|_0^1$$

取 $p(x) = ax^2 + bx + c$，$p''(x) = 2a$ 联系题目条件！

则 $\int_0^1 f(x)\cdot p''(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\cdot 2a\, dx = 2a\int_0^1 f(x)\,dx$

该公式的作用：条件与结论的桥梁

$$f'(x)\cdot p(x)\Big|_0^1 = f'(1)\cdot p(1) - f'(0)\cdot p(0)$$

$$f(x)\cdot p'(x)\Big|_0^1 = f(1)\cdot p'(1) - f(0)\cdot p'(0)$$

$f(1)$, $f(0)$ 已知，$f'(1)$, $f'(0)$ 未知 $\Rightarrow$ 令 $p(1) = p(0) = 0$

设 $p(x) = a(x-0)(x-1) = a(x^2 - x)$，不妨取 $a=1$ $\Rightarrow$ $p(x) = x^2 - x$

(开始做题) $\int_0^1 f''(x)\cdot(x^2-x)\,dx = \int_0^1 2f(x)\,dx - (f(1)\cdot p'(1) - f(0)\cdot p'(0))$

$$= 2\int_0^1 f(x)\,dx - f(1) = 2 - 1 = 1$$

(积分第一中值定理) (from wiki)

设 $f(x): [a,b] \to R$ 为连续函数，$g(x): [a,b] \to R$

$g(x)$ 可积，且在积分区间中不变号，那么

$\exists \xi \in (a,b)$，使得 $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\cdot\int_a^b g(x)dx$

$\int_0^1 f''(x)(x^2-x)dx = 1$，$(x^2-x) = x(x-1) \le 0$，$x\in[0,1]$，$f''(x)$连续

$\Rightarrow \exists \eta \in (0,1)$，使得 $\int_0^1 f''(x)(x^2-x)dx = f''(\eta)\cdot\int_0^1(x^2-x)dx = 1$

$\Rightarrow f''(\eta) = \dfrac{1}{\int_0^1(x^2-x)dx} = \dfrac{1}{-\frac{1}{6}} = -6$

$f(x)$在$[a,b]$上有二阶连续导数，且$f(a)=f(b)=0$，$M=\max\limits_{[a,b]}|f''(x)|$

证明：$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \dfrac{(b-a)^3}{12}M$

(分析) $p(x) = kx^2+mx+n$

例)重点，消掉

$\int_a^b f''(x)p(x)dx = \int_a^b f(x)\cdot p''(x)dx + f'(x)\cdot p(x)\Big|_a^b + f(x)\cdot p'(x)\Big|_a^b$

$f'(x)p(x)\Big|_a^b = f'(b)\cdot p(b) - f'(a)\cdot p(a)$

取 $p(b)=p(a)=0 \Rightarrow p(x)=k(x-a)(x-b)$，不妨取 $k=1$

$\Rightarrow p(x) = (x-a)(x-b)$

(开始做题) 设 $p(x) = (x-a)(x-b)$

$\int_a^b f''(x)\cdot p(x)dx = \int_a^b f(x)\cdot p''(x)dx + f'(x)\cdot p(x)\Big|_a^b + f(x)\cdot p'(x)\Big|_a^b$

$\int_a^b f''(x)\cdot(x-a)(x-b)dx = 2\int_a^b f(x)dx$

$(x-a)(x-b)\le 0$，$x\in[a,b]$，$f''(x)$连续

$\Rightarrow \exists\xi\in(a,b)$ 使得 $\int_a^b f''(x)\cdot(x-a)(x-b)dx = f''(\xi)\cdot\int_a^b(x-a)(x-b)dx$

$= -\frac{1}{6}(b-a)^3\cdot f''(\xi)$

$2\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)dx = -\frac{1}{6}(b-a)^3\cdot f''(\xi)$

$\Rightarrow \left|2\int_a^b f(x)dx\right| = \left|-\frac{1}{6}(b-a)^3 f''(\xi)\right| = \frac{1}{6}(b-a)^3|f''(\xi)| \le \dfrac{(b-a)^3}{6}M$

$\Rightarrow \left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \dfrac{(b-a)^3}{12}M$

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶连续导数且 $f'(0)=f'(1)=0$, $f(0)+f(1)=0$

证明: $\exists\,\xi\in(0,1)$, 使得 $f''(\xi)=-12\int_0^1 f(x)dx$

(分析) $\int_0^1 f''(x)\cdot p(x)dx = \int_0^1 f(x)\cdot p''(x)dx + f'(x)\cdot p(x)\Big|_0^1 - f(x)\cdot p'(x)\Big|_0^1$

$f'(x)\,p(x)\Big|_0^1 = f'(1)\,p(1) - f'(0)\cdot p(0) = 0$

$f(x)\cdot p'(x)\Big|_0^1 = f(1)\cdot p'(1) - f(0)\cdot p'(0)$

$p'(1)=1$, $p'(0)=-1$

设 $p(x)=ax^2+bx+c$ $\qquad p'(x)=2ax+b$

$p'(1)=2a+b=1$, $p'(0)=b=-1$ $\Rightarrow$ $a=1$

不妨设 $c=0$

(开始做题) $p(x)=x^2-x=x(x-1)$

$\int_0^1 f''(x)\,p(x) = \int_0^1 f(x)\cdot p''(x)dx + f'(x)\cdot p(x)\Big|_0^1 - f(x)\cdot p'(x)\Big|_0^1$

$= 2\int_0^1 f(x)dx - (f(1)+f(0)) = 2\int_0^1 f(x)dx$

$p(x)=x(x-1)\le 0$, $x\in[0,1]$, $f''(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续

$\Rightarrow \exists\,\xi\in[0,1]$ 使得 $\int_0^1 f''(x)\cdot p(x)dx = f''(\xi)\cdot\int_0^1 p(x)dx$

$= f''(\xi)\cdot\int_0^1 x^2-x\,dx = f''(\xi)\cdot\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^1 = f''(\xi)\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)$

$f''(\xi)\cdot\left(-\frac{1}{6}\right) = \int_0^1 f''(x)\cdot p(x)dx = 2\int_0^1 f(x)dx$

$\Rightarrow f''(\xi) = -12\int_0^1 f(x)dx$

微分与不等式 > 泰勒中值定理

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且满足 $|f''(x)| \le 1$，

$f(x)$ 在 $(0,1)$ 内取得最大值 $\frac{1}{4}$，证明：$|f(0)| + |f(1)| < 1$

设 $f(x)$ 在 c 处取最大值，$f(c) = \frac{1}{4}$

（费马定理）《30讲》P214

设 $f(x)$ 在点 x_0 处满足 $\begin{cases} \text{可导} \\ \text{取极值} \end{cases}$，则 $f'(x_0) = 0$

$f'(c) = 0$

$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(\xi)}{2}(x-c)^2$，$\xi$ 介于 x 与 c 之间

$= \frac{1}{4} + \frac{f''(\xi)}{2}(x-c)^2$

$f(0) = \frac{1}{4} + \frac{f''(\xi_1)}{2}c^2$，$\xi_1 \in (0,c)$

$f(1) = \frac{1}{4} + \frac{f''(\xi_2)}{2}(1-c)^2$，$\xi_2 \in (c,1)$

三角不等式

$|f(0)| = \left|\frac{1}{4} + \frac{f''(\xi_1)}{2}c^2\right| \le \left|\frac{1}{4}\right| + \left|\frac{f''(\xi_1)}{2}c^2\right| = \frac{1}{4} + \frac{c^2}{2}|f''(\xi_1)| \le \frac{1}{4} + \frac{c^2}{2}$

$|f(1)| = \left|\frac{1}{4} + \frac{f''(\xi_2)}{2}(1-c)^2\right| \le \left|\frac{1}{4}\right| + \left|\frac{f''(\xi_2)}{2}(1-c)^2\right| = \frac{1}{4} + \frac{(1-c)^2}{2}|f''(\xi_2)| \le \frac{1}{4} + \frac{(1-c)^2}{2}$

$|f(0)| + |f(1)| \le \frac{1}{2} + \frac{c^2+(1-c)^2}{2}$

$\frac{1}{2} + \frac{c^2+(1-c)^2}{2} < 1 \Leftrightarrow c^2 + (1-c)^2 < 1 \Leftrightarrow 2c^2 - 2c < 0$

$\Leftrightarrow 2c(c-1) < 0$，$c \in (0,1)$ 成立

$f(x)$ 二次可导，$f(0) = f(1) = 0$，$\max\limits_{[0,1]} f(x) = 2$，

证明 $\min\limits_{[0,1]} f''(x) \le -16$

设 $\max\limits_{[0,1]} f(x) = f(c) = 2$, $f(0)=f(1)=0 \Rightarrow c\in(0,1)$

由费马定理, $f'(c)=0$

$f(x) = f(c) + f'(c)\cdot(x-c) + \dfrac{f''(\delta)}{2}(x-c)^2$, δ 介于 x 与 c 之间

$= 2 + \dfrac{f''(\delta)}{2}(x-c)^2$

$f(0) = 2 + \dfrac{f''(\delta_1)}{2}c^2 = 0$, $\delta_1\in(0,c)$

$f(1) = 2 + \dfrac{f''(\delta_2)}{2}(1-c)^2 = 0$, $\delta_2\in(c,1)$

$\Rightarrow \begin{cases} f''(\delta_1) = \dfrac{-4}{c^2} \\ f''(\delta_2) = \dfrac{-4}{(1-c)^2} \end{cases}$

① $c\in(0,\frac{1}{2}) \Rightarrow \frac{1}{c}\in(2,+\infty)$ $\frac{1}{c^2}\in(4,+\infty)$, $\frac{-4}{c^2}\in(-\infty,-16)$

$f''(\delta_1) = \dfrac{-4}{c^2} \leq -16$

② $c\in(\frac{1}{2},1) \Rightarrow \frac{1}{1-c}\in(2,+\infty)$ $\frac{1}{(1-c)^2}\in(4,+\infty)$, $\frac{-4}{(1-c)^2}\in(-\infty,-16)$

$f''(\delta_2) = \dfrac{-4}{(1-c)^2} \leq -16$

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导, $f'(a)=f'(b)=0$,

证明: $\exists\ \xi\in(a,b)$, 使得 $|f''(\xi)| \geq \dfrac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$

[分析]

$f(x) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a) + \dfrac{f''(\delta_1)}{2}(x-a)^2$, $\delta_1\in(a,x)$

$= f(a) + \dfrac{f''(\delta_1)}{2}(x-a)^2$

$f(x) = f(b) + f'(b)(x-b) + \dfrac{f''(\delta_2)}{2}(x-b)^2$, $\delta_2\in(x,b)$

$= f(b) + \dfrac{f''(\delta_2)}{2}(x-b)^2$

$0 = f(b) - f(a) + \frac{1}{2}\left[f''(\delta_2)\cdot(x-b)^2 - f''(\delta_1)\cdot(x-a)^2\right]$

$\Rightarrow f(b)-f(a) = \dfrac{(x-a)^2}{2}f''(\delta_1) - \dfrac{(x-b)^2}{2}f''(\delta_2)$

$$|f(b)-f(a)| = \left|\frac{(x-a)^2}{2}f''(\delta_1) - \frac{(x-b)^2}{2}f''(\delta_2)\right|$$

$$\leq \frac{(x-a)^2}{2}|f''(\delta_1)| + \frac{(x-b)^2}{2}|f''(\delta_2)|$$

记 $M = \max\{f''(\delta_1), f''(\delta_2)\}$

$$|f(b)-f(a)| \leq \left[\frac{(x-a)^2}{2} + \frac{(x-b)^2}{2}\right]M$$

取 $\frac{(x-a)^2}{2} + \frac{(x-b)^2}{2} = \frac{(b-a)^2}{4}$

$\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^2 + \left(\frac{x-b}{b-a}\right)^2 = \frac{1}{2}$ 令 $\frac{x-a}{b-a} = t \Rightarrow \frac{b-x}{b-a} = 1-t$

$t^2 + (t-1)^2 = \frac{1}{2}$

$t^2 + t^2 - 2t + 1 = \frac{1}{2}$

$2t^2 - 2t + \frac{1}{2} = 0$

$4t^2 - 4t + 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2} = \frac{x-a}{b-a} \Rightarrow x = \frac{a+b}{2}$

$$|f(b)-f(a)| \leq M\left[\frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2\right]$$

$$= M\left[\frac{(b-a)^2}{4}\right]$$

$$\Rightarrow M \geq \frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$$

$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，$f(0) = f(1)$，$|f''(x)| \leq 2$

证明：当 $0 < x < 1$ 时，$|f'(x)| < 1$

$f(t) = f(x) + f'(x)\cdot(t-x) + \frac{f''(\delta)}{2}(t-x)^2$，$\delta$ 介于 x 与 t 之间

$f(1) = f(x) + f'(x)\cdot(1-x) + \frac{f''(\delta_1)}{2}(1-x)^2$，$\delta_1 \in (x,1)$

$f(0) = f(x) + f'(x)\cdot(-x) + \frac{f''(\delta_2)}{2}(-x)^2$，$\delta_2 \in (0,x)$

$0 = f'(x) + \frac{f''(\delta_1)}{2}(1-x)^2 - \frac{f''(\delta_2)}{2}x^2$

$f'(x) = \frac{f''(\delta_2)}{2}x^2 - \frac{f''(\delta_1)}{2}(1-x)^2$

$$|f'(x)| = \left|\frac{f''(\delta_2)}{2}x^2 - \frac{f''(\delta_1)}{2}(1-x)^2\right|$$

$$\leq \frac{x^2}{2}|f''(\delta_2)| + \frac{(1-x)^2}{2}|f''(\delta_1)|$$

$$\leq x^2 + (1-x)^2 = 2x^2 - 2x + 1 = 2x(x-1) + 1$$

$x \in (0,1)$, $x(x-1) < 0$, $x(x-1)+1 < 1$

从而 $|f'(x)| < 1$

设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上二阶可导，$|f(x)| \leq M_0$，$|f''(x)| \leq M_2$，

$M_0 M_2 \neq 0$，证明：$|f'(x)| \leq \sqrt{2M_0M_2}$

肯定在 x 处展开，因为要有 $f'(x)$，$f''(x)$

不知道是谁在 x 处展开，待定

$f(y) = f(x) + f'(x)(y-x) + \frac{f''(\delta)}{2}(y-x)^2$，$\delta$ 介于 y 与 x 之间

令 $y - x = h$，$y = x + h$

$f(x+h) = f(x) + f'(x) \cdot h + \frac{f''(\delta_1)}{2} \cdot h^2$，$\delta_1$ 介于 $x+h$ 与 x 之间

$f(x-h) = f(x) - f'(x) \cdot h + \frac{f''(\delta_2)}{2} h^2$，$\delta_2$ 介于 $x-h$ 与 x 之间

$$f(x+h) - f(x-h) = 2f'(x) \cdot h + \left[\frac{f''(\delta_1)}{2} - \frac{f''(\delta_2)}{2}\right] \cdot h^2$$

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + \frac{\left[\frac{f''(\delta_2)}{2} - \frac{f''(\delta_1)}{2}\right] \cdot h^2}{2h}$$

$$|f'(x)| = \left|\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + \frac{\left[\frac{f''(\delta_2)}{2} - \frac{f''(\delta_1)}{2}\right] \cdot h^2}{2h}\right|$$

$$\leq \frac{|f(x+h)| + |f(x-h)|}{|2h|} + \frac{\left[\left|\frac{f''(\delta_2)}{2}\right| + \left|\frac{f''(\delta_1)}{2}\right|\right] \cdot h^2}{|2h|}$$

$$\leq \frac{M_0}{|h|} + \frac{M_2 \cdot h^2}{2|h|} \leq 2\sqrt{\frac{M_0M_2}{2}} = \sqrt{2M_0M_2}$$

设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上三阶可导，且 $|f(x)| \le M_0$，$|f'''(x)| \le M_3$，

$M_0 M_3 \ne 0$，证明 $|f'(x)| \le \sqrt[3]{\dfrac{9M_0^2 M_3}{8}}$

$f(x+h) = f(x) + f'(x)\cdot h + \dfrac{f''(x)}{2}h^2 + \dfrac{f'''(\delta_1)}{6}\cdot h^3$，$\delta_1$ 介于 $x+h$ 与 x 之间

$f(x-h) = f(x) - f'(x)\cdot h + \dfrac{f''(x)}{2}h^2 - \dfrac{f'''(\delta_2)}{6}\cdot h^3$，$\delta_2$ 介于 $x-h$ 与 x 之间

$f(x+h) - f(x-h) = 2f'(x)\cdot h + \dfrac{h^3}{6}[f'''(\delta_1) + f'''(\delta_2)]$

$f'(x) = \dfrac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \dfrac{h^2}{12}[f'''(\delta_1) + f'''(\delta_2)]$

$$|f'(x)| = \left|\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{12}[f'''(\delta_1) + f'''(\delta_2)]\right|$$

$$\le \left|\frac{f(x+h)}{2h}\right| + \left|\frac{f(x-h)}{2h}\right| + \frac{h^2}{12}|f'''(\delta_1) + f'''(\delta_2)|$$

$$\le \frac{M_0}{|2h|} + \frac{M_0}{|2h|} + \frac{h^2}{6}\cdot M_3 \le 3\sqrt[3]{\frac{M_0}{|2h|}\cdot\frac{M_0}{|2h|}\cdot\frac{h^2}{6}M_3}$$

$$= 3\sqrt[3]{\frac{1}{24}M_0^2 M_3} = \sqrt[3]{\frac{9}{8}M_0^2 M_3}$$